



# ΘΕΜΑΤΑ

στο εσωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων του επιπέδου  
στα πλαίσια της διδακτικής πράξης στο σχολείο

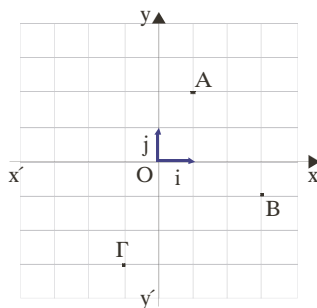
**Δ. Ντρίζος**

M. ed. Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθ/κών  
6ο Εν. Λύκειο Τρικάλων

Στο άρθρο αυτό παρουσιάζουμε μια σειρά θεμάτων που έχουν ως στόχο την κατανόηση από τους μαθητές της έννοιας του διανύσματος στο επίπεδο - όπου έχουμε ορίσει ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων  $Oxy$ . Πρώτον, ως γεωμετρικό αντικείμενο (προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα που δηλώνει μετατόπιση) και δεύτερον, ως ένα διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών. Με την διδασκαλία αυτή θεώρηση, οι πράξεις μεταξύ διανυσμάτων, ως γεωμετρικών αντικειμένων, ανάγονται σε πράξεις μεταξύ διατεταγμένων ζευγών πραγματικών αριθμών (αλγεβρική εκδοχή του διανύσματος).

Τα θέματα που θα δούμε, δόθηκαν στους μαθητές μας, τη σχολική χρονιά 2003-2004, στο 6ο Ε.Λ. Τρικάλων, κάποια ως εργασία για το σπίτι, και μερικά άλλα ως θέματα διαγωνίσματος, στα πλαίσια της ενότητας του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων.

## ΘΕΜΑ 1ο:



Στο διπλανό σχήμα το  $Oxy$  είναι ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων με  $\vec{i}, \vec{j}$  τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων  $x'$  των τεταγμένων και  $y'$  των τεταγμένων αντίστοιχα.

(α) Να υπολογίσετε τους αριθμούς που αντιστοιχούν στα κενά που σημειώνονται παρακάτω με...

- $\vec{AB} = (\dots, \dots)$ ,  $\vec{B\Gamma} = (\dots, \dots)$ ,  $\vec{\Gamma A} = (\dots, \dots)$
- $\vec{AB} \cdot \vec{B\Gamma} = \dots$ ,  $\vec{B\Gamma} \cdot \vec{\Gamma A} = \dots$ ,  $\vec{\Gamma A} \cdot \vec{AB} = \dots$
- $(\vec{AB} \cdot \vec{B\Gamma}) \cdot \vec{\Gamma A} = (\dots, \dots)$ ,  $(\vec{B\Gamma} \cdot \vec{\Gamma A}) \cdot \vec{AB} = (\dots, \dots)$ ,
- $(\vec{\Gamma A} \cdot \vec{AB}) \cdot \vec{B\Gamma} = (\dots, \dots)$

### Σχόλια

Το ερώτημα (γ) αναλύθηκε πολύ προσεκτικά στους μαθητές ο όρος "πόλη πλήρως δομημένη": Το ταξί κινείται, υποχρεωτικά, όπως είναι φυσικό, μόνο επί των περιμέτρων των τετραγώνων.

Δηλαδή, μόνο κατακόρυφα ή οριζόντια. Συζητήσαμε για τη λεγόμενη "Γεωμετρία των ταξί" και τον τρόπο με τον οποίο μετρούνται οι αποστάσεις στη Γεωμετρία αυτή. Εδώ, ο συντομότερος δρόμος μεταξύ δύο σημείων A και B δεν είναι η Ευκλείδεια απόσταση (AB)! Ένα άλλο παράδειγμα εφαρμογής της "Γεωμετρίας των ταξί" είναι η διαδικασία με την οποία σχηματίζονται, τελικά, οι εικόνες στους δέκτες της τηλεόρασης.

Το ερώτημα (δ) όπως διατυπώνεται, χαρακτηρίστηκε ως δύσκολο από τους μαθητές. Κυρίως γιατί "ξεφεύγει" από το συνηθισμένο στιλ διατύπωσης και τα είδη των θεμάτων που συνήθως διαπραγματευόμαστε στην τάξη. Δόθηκε για εργασία στο σπίτι, αφού πρώτα εξηγήθηκαν προσεκτικά οι υποθέσεις και το ζητούμενο. Δύο μόνο μαθητές του τμήματος κινήθηκαν προς τη σωστή κατεύθυνση προσεγγίζοντας την ιδέα της λύσης και η απάντηση συμπληρώθηκε στην τάξη από τον διδάσκοντα σε επόμενο μάθημα. Αναδύεται έτσι το ερώτημα: τελικά, πρέπει ή όχι να θέτουμε στους μαθητές μας και τέτοια ερωτήματα; Η άποψή μας είναι πως ναι. Και αυτό γιατί: Πρώτον, τέτοια ερωτήματα αναδεικνύουν την άποψη ότι τα Μαθηματικά δεν είναι μόνο εφαρμογή τύπων και διαδικασιών αλγοριθμικού χαρακτήρα.

Δεύτερον, καλλιεργούν την ερευνητική διάθεση σε κάποιους (έστω και λίγους) μαθητές παρέχοντας τους τις κατάλληλες ευκαιρίες.

- $(\vec{AB} \cdot \vec{B\Gamma}) \cdot \vec{\Gamma A} + (\vec{B\Gamma} \cdot \vec{\Gamma A}) \cdot \vec{AB} + (\vec{\Gamma A} \cdot \vec{AB}) \cdot \vec{B\Gamma} = (\dots, \dots)$
- $|\vec{\Gamma A}| = \dots, |\vec{\Gamma B}| = \dots, \vec{\Gamma M} \cdot \vec{AB} = \dots$ , όπου M είναι το μέσον του τμήματος AB.
- $\text{syn}\hat{\Gamma AB} = \dots, \text{syn}\hat{\Gamma BA} = \dots$
- (β) Να εξετάσετε αν είναι **Σωστή** ή **Λάθος** καθεμιά από τις σχέσεις που ακολουθούν:
  - $\vec{\Gamma A} = \vec{\Gamma B}$
  - $\vec{\Gamma A} + \vec{\Gamma B} = 2 \cdot \vec{\Gamma M}$
  - $(\vec{\Gamma A} \cdot \vec{\Gamma B}) \cdot \vec{\Gamma M} = \vec{\Gamma A} \cdot (\vec{\Gamma B} \cdot \vec{\Gamma M})$
  - $\frac{\vec{A\Gamma} \cdot \vec{A\B}}{|\vec{A\Gamma}| \cdot |\vec{A\B}|} = \text{syn}\hat{\Gamma AB}$
  - $(\vec{AB} + \vec{B\Gamma} + \vec{\Gamma A}) \perp \vec{A\B}$
  - $|\vec{\Gamma A} \cdot \vec{\Gamma B}| \leq |\vec{\Gamma A}| \cdot |\vec{\Gamma B}|$
- (γ) Αν οι οριζόντιες και κατακόρυφες ευθείες του προηγούμενου σχήματος παριστάνουν τους δρόμους μιας πλήρως δομημένης πόλης, τότε να βρείτε το μήκος της ελάχιστης διαδρομής που θα διανύει ένα ταξί,
  - (i) που ξεκινά από το A, διέρχεται από τα σημεία B και Γ και πρέπει να επανέλθει στο A.
  - (ii) που ξεκινά από το Γ με σκοπό να προσεγγίσει το μέσον του τμήματος AB.
 Υποθέστε ότι, όλοι οι δρόμοι παρουσιάζουν την ίδια κυκλοφοριακή κίνηση.
- (δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει ισόπλευρο τρίγωνο του οποίου οι τρεις κορυφές του να συμπίπτουν με κορυφές οποιωνδήποτε τετραγώνων του σχήματος και να δικαιολογήσετε το αποτέλεσμα των παρατηρήσεών σας με μαθηματικά επιχειρήματα.

Περισσότερα στο 1ο τεύχος του "φ" (σελ. 47-52)