Οι Μέσοι Όροι
και οι σχέσεις τους

Λ. Σιμπάσωφ

*Μετάφραση: **Βιβή Ι. Λαΐνα**, Πτυχ. Μαθηματικός Πανεπιστημίου Χαρκόβου, Ph. D στην Παιδαγωγική (ειδικότητα "Διδακτική των Μαθηματικών") Πανεπιστήμιο Λένινγκραντ*

[Σ.τ.Ε] *Το παρόν άρθρο του Λ. Σιμπάσωφ από το 4ο τεύχος 2004 του φημισμένου και διεθνώς αναγνωρισμένου ρωσσικού περιοδικού ΚΒΑΝΤ, επιλέχθηκε να μεταφραστεί (με άδεια της Συντακτικής Επιτροπής) και να παρουσιασθεί στους Ελληνες αναγνώστες του "Φ" για τους εξής λόγους:*

α. Είναι ουσιαστικό και επιστημονικά ενδιαφέρον, αφού δίνει νόημα και περιεχόμενο στο στείρο ασκησιολόγιο που κυκλοφορεί σαν πλημμυρίδα γύρω μας.

β. Είναι απολύτως κατανοητό προχωρώντας και γενικεύοντας βήμα - βήμα από πολύ απλά πράγματα μέχρι και αρκετά προχωρημένα θέματα χωρίς χάσματα και παλινωδίες.

γ. Είναι από άποψη Διδακτικής ιδιαίτερα ενδιαφέρον εγκαθιστώντας σε κάθε βήμα γέφυρες και διασυνδέσεις ανάμεσα στην Άλγεβρα, την Γεωμετρία και την Ανάλυση.

δ. Το στήσιμο, η αρχιτεκτονική δομή του άρθρου νομίζουμε πως είναι υποδειγματική. Δεν ακολουθεί το τετριμμένο σχήμα, αλλά αλληλοσυνδέει θεωρία με προβλήματα σε όλη την έκτασή του, βάζοντας έτσι τον αναγνώστη σε ένα κλίμα ενεργητικού και όχι παθητικού διαβάσματος.

Στο άρθρο αυτό ο Λ. Σιμπάσωφ κάνει πραγματικά Μαθηματικά και προσκαλεί τον αναγνώστη να συμμετάσχει σε αυτή την συναρπαστική διαδικασία.

Λίγη ιστορία

Με τον μέσο αριθμητικό $\frac{a+b}{2}$ και τον μέσο γεωμετρικό $\sqrt{ab}$ των αριθμών a και b οι αναγνώστες του Κβαντ γνωρίζονται καλά. Τα μεγέθη αυτά συναντώνται αρκετά συχνά κατά την επίλυση σχολικών ασκήσεων. Ο μέσος αριθμητικός χρησιμοποιείται τόσο συχνά σε διάφορα δελτία στοιχείων, πλάνα και αναφορές που όταν ακούμε κάτι για μέσο μέγεθος, αυτόματα πάει το μυαλό μας στον μέσο αριθμητικό. Σε αυτό βασίζεται η γνωστή άσκηση - παγίδα: ένα σώμα κινείται στο πρώτο μισό της απόστασης με ταχύτητα a, ενώ στο δεύτερο μισό της απόστασης με ταχύτητα b. Να υπολογισθεί η μέση ταχύτητα του σώματος στο σύνολο της απόστασης. Η ζητούμενη ταχύτητα δεν είναι ίση με το μέσο αριθμητικό των δύο ταχυτήτων, όπως θα φαινόταν σε κάποιον με μία πρώτη ματιά, αλλά ισούται με $\frac{2ab}{a+b}$, δηλαδή με τον μέσο αρμονικό των δύο αριθμών.

Ακριβώς δεν γνωρίζουμε το πότε εμφανίσθηκαν στα Μαθηματικά οι έννοιες των μέσων μεγεθών. Υποθέτουν όμως, ότι οι κάτοικοι της Βαβυλώνας πάνω από τρεις χιλιάδες χρόνια πριν τα χρησιμοποιούσαν στον υπολογισμό των τετραγωνικών ριζών. Στους πίνακες που ήρθαν στο φως του σύγχρονου κόσμου, τις τετραγωνικές ρίζες των φυσικών αριθμών τις υπολόγιζαν βάσει του γνωστού τύπου: εάν $N = \beta^2 + r$, τότε $\sqrt{N} = \sqrt{\beta^2 + r} = \beta + \frac{r}{2\beta}$

Αποκαθιστώντας την πορεία σκέψης των Βαβυλωνίων, οι σύγχρονοι επιστήμονες έφθασαν στο συμπέρασμα, ότι έπαιρναν τον μέσο αριθμητικό των αριθμών β και $\frac{N}{\beta}$. Στην πραγματικότητα εάν θέσουμε το $\alpha = \frac{N}{\beta}$, τότε

$$\beta_1 = \frac{(\alpha + \beta)}{2} = \frac{\beta + r}{2\beta}$$

Αρκετά αργότερα ο ΄Ελληνας μαθηματικός **΄Ηρων** (1ος αιώνας) στα "Μετρικά" του, εφαρμόζοντας την ίδια μέθοδο προσεγγιστικού υπολογισμού της τετραγωνικής ρίζας, έγραφε, ότι εάν το αποτέλεσμα λαμβάνεται με πολύ μεγάλο σφάλμα, είναι δυνατόν να επαναληφθεί η διαδικασία, δηλαδή να υπολογισθεί ο μέσος αριθμητικός των αριθμών β_1 και N/β_1.

Εφαρμόζουμε αυτόν τον αλγόριθμο για τον υπολογισμό της τετραγωνικής ρίζας, φυσικού αριθμού γράφοντάς τον σε μορφή γινομένου δύο φυσικών αριθμών: $N = ab$ (εάν ο N είναι πρώτος αριθμός, τότε ένας από τους παράγοντες είναι ίσος με την μονάδα). Ως πρώτη προσέγγιση της $\sqrt{ab}$ λαμβάνουμε $b_1 = \frac{a+b}{2}$, και μετά ακολουθώντας τις οδηγίες του **΄Ηρωνα,** βρίσκουμε $\alpha_1 = \frac{ab}{b_1}$, που αποτελεί τον μέσο αρμονικό $\frac{2ab}{a+b}$ των αριθμών a και b.

Άσκηση 1η **Να αποδειχθεί η διπλή ανισότητα:** $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ **(1)**

Λύση: Η δεύτερη προσέγγιση είναι $b_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$. Στην συνέχεια υπολογίζουμε $a_2 = \frac{a_1 b_1}{b_2} = \frac{2a_1 b_1}{a_1 + b_1}$. Εύκολα βλέπουμε ότι $a_1 \leq a_2 \leq \sqrt{ab} \leq b_2 \leq b_1$. Συνεχίζοντας αυτή την διαδικασία, στο n-οστό βήμα λαμβάνουμε:

$$b_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \qquad , \qquad a_n = \frac{2a_{n-1} b_{n-1}}{a_{n-1} + b_{n-1}}$$

Παράδειγμα:

για $\sqrt{14} = \sqrt{7 \cdot 2}$ έχουμε $b_1 = 4{,}5$, $a_1 = 3{,}(1)$, $b_2 = 3{,}80(5)$, $a_2 = 3{,}678832$, $b_3 = 3{,}742194$, $a_3 = 3{,}741121$, $b_4 = 3{,}741657$, $a_4 = 3{,}741657$. ΄Ετσι λοιπόν, με ακρίβεια εκατομμυριοστού (0,000001) η τετραγωνική ρίζα του 14 είναι 3,741657. Το παράδειγμα δείχνει ότι αυξάνοντας το n όχι μόνο τα b_n, αλλά και τα a_n σε κάθε βήμα προσεγγίζουν όλο και με μεγαλύτερη ακρίβεια την $\sqrt{14}$. Το γεγονός αυτό ισχύει και στη γενικότητά του.