ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΙ

Λύσεις Θεμάτων από το 1ο Τεύχος

[Σ.τ.Ε.] Στο 1ο τεύχος του «φ» είχαμε δημοσιεύσει δύο συλλογές προβλημάτων για Μαθηματικούς Διαγωνισμούς με το σκεπτικό να θέσουμε στη διάθεση των συναδέλφων που θα ήθελαν να λειτουργήσουν τμήματα Προετοιμασίας για Μαθηματικούς Διαγωνισμούς, ένα υλικό όχι εξεζητημένο, δομημένο με τρόπο εύχρηστο για αποτελεσματική χρήση, ικανό να καλύψει ένα εξάμηνο τέτοιας προσπάθειας. Τα προβλήματα που απευθύνονται σε μικρούς μαθητές δεν παρουσιάζουν δυσκολίες. Το ίδιο και πολλά από τα υπόλοιπα για μεγάλους μαθητές. Ωστόσο οι λύσεις τους για πολλούς είναι επιθυμητή. Λίγο ο χρόνος και πολύ ο χώρος δεν μας επέτρεψαν να συμπεριλάβουμε περισσότερες λύσεις. Ωστόσο στα επόμενα τεύχη θα επανέλθουμε. Μέχρι τότε η στήλη περιμένει και τις δικές σας λύσεις.

Θέματα Αλγεβρικού Λογισμού

1. Ο $A=\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ είναι ρητός;

Έχω $A^3=\sqrt{5}+2-3\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)^2\cdot(\sqrt{5}-2)}+3\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)\cdot(\sqrt{5}-2)^2}-\sqrt{5}+2\Rightarrow$

$$A^3=4-3\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)\Rightarrow A^3=4-3A\Rightarrow A^3+3A-4=0\Rightarrow A^3+4A-A-4=0$$

$A(A+1)\cdot(A-1)+4(A-1)=0\Rightarrow(A-1)\cdot(A^2+A+4)=0\Leftrightarrow A=1$ ρητός.

2. Στο θέμα αυτό υπάρχει τυπογραφική αβλεψία, η σωστή διατύπωση είναι: “Αν α, β, γ, δ θετικοί ακέραιοι για τους οποίους ισχύει: $\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}=\frac{\alpha\beta+1}{\gamma\delta+1}$, να δειχτεί ότι θα είναι: $\alpha=\gamma$ και $\beta=\delta$”.

Λύση

$$\left.\begin{array}{l}\text{Έχω: }\dfrac{\alpha}{\gamma}=\dfrac{\alpha\beta+1}{\gamma\delta+1}\Leftrightarrow\alpha\gamma\delta+\alpha=\alpha\beta\gamma+\gamma\\ \text{και }\dfrac{\beta}{\delta}=\dfrac{\alpha\beta+1}{\gamma\delta+1}\Leftrightarrow\beta\gamma\delta+\beta=\alpha\beta\delta+\delta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\alpha\gamma(\delta-\beta)=\gamma-\alpha\\ \beta\delta(\gamma-\alpha)=\delta-\beta\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\alpha\beta\gamma\delta(\delta-\beta)\cdot(\gamma-\alpha)=(\gamma-\alpha)(\delta-\beta)\Leftrightarrow(\gamma-\alpha)(\delta-\beta)\cdot(\alpha\beta\gamma\delta-1)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \gamma \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\gamma} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{\beta}{\delta} = 1 \Leftrightarrow \beta = \delta \\ \text{ή} \\ \beta = \delta \Leftrightarrow \dfrac{\beta}{\delta} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\gamma} = 1 \Leftrightarrow \alpha = \gamma \\ \text{ή} \\ \alpha\beta\gamma\delta = 1 \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = \delta = 1 \end{cases}$$

8. Έστω $x = \dfrac{\kappa}{\lambda}$ με $\kappa,\lambda \in \mathbb{Z}$, $\lambda \neq 0$ ρητή ρίζα της εξίσωσης, με κ, λ πρώτους μεταξύ τους.

Τότε: $x^{2003} = x^{2004} + 1 \Leftrightarrow x^{2003}(1-x) = 1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{\kappa}{\lambda}\right)^{2003} \cdot \left(1 - \dfrac{\kappa}{\lambda}\right) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{\kappa^{2003}}{\lambda^{2003}} \cdot \dfrac{\lambda - \kappa}{\lambda} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \kappa^{2003} \cdot (\lambda - \kappa) = \lambda^{2004} \Rightarrow \kappa/\lambda$ άτοπο. Άρα η εξίσωση δεν έχει ρητή ρίζα.

11. Αφού $x + y + z = 0 \Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ (από ταυτότητα Euler), άρα $xyz = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $y = 0$ ή $z = 0$. Αν $x = 0 \Leftrightarrow z^{2003} - y^{2003} = 2^{2004}$ και $z + y = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = -y \\ (-y)^{2003} - y^{2003} = 2^{2004} \Leftrightarrow -2 \cdot y^{2003} = 2 \cdot 2^{2003} \end{cases} \Leftrightarrow y = -2 \text{ άρα } z = 2$$

Αν $y = 0 \Rightarrow x + z = 0 \Leftrightarrow z = -x$ και βέβαια: $x^{2003} + (-x)^{2003} = 2^{2004} \Leftrightarrow 0 = 2^{2004}$ άτοπο.
Ομοίως και για $z = 0$ καταλήγουμε $y = -2$, $x = 2$. Άρα το σύστημα έχει δύο λύσεις, τις:

$$(x_1, y_1, z_1) = (0, -2, 2) \text{ και } (x_2, y_2, z_2) = (2, -2, 0)$$

Θέματα στις ανισότητες

1. **i)** $\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma} + \dfrac{\beta}{\alpha+\gamma} + \dfrac{\gamma}{\alpha+\beta} < 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 < \alpha\beta\gamma + \alpha^2(\beta+\gamma) + \beta^2(\gamma+\alpha) + \gamma^2(\alpha+\beta) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha^2[\alpha - (\beta+\gamma)] + \beta^2[\beta - (\gamma+\alpha)] + \gamma^2[\gamma - (\alpha+\beta)] - \alpha\beta\gamma < 0$ που ισχύει γιατί α, β, γ μήκη πλευρών τριγώνου.

ii) **α)** $1 \leq \dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha} \Leftrightarrow 0 \leq \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2 + (\beta-\gamma)^2 + (\gamma-\alpha)^2 > 0$

β) $\dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha} < 2 \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 - 2\alpha\beta - 2\beta\gamma - 2\gamma\alpha < 0 \Leftrightarrow$

$(\alpha-\beta)^2 + (\beta-\gamma)^2 + (\gamma-\alpha)^2 < \alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ που ισχύει, γιατί

$|\alpha-\beta| < \gamma$, $|\beta-\gamma| < \alpha$, $|\gamma-\alpha| < \beta$.

$$\alpha+\beta+\gamma = x+y+z$$

ii) Θέτω

$$\left.\begin{aligned} \alpha+\beta+\gamma &= x \\ \beta+\gamma-\alpha &= y \\ \gamma+\alpha-\beta &= z \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} \alpha &= x+\frac{z}{2} \\ \beta &= x+\frac{y}{2} \\ \gamma &= y+\frac{z}{2} \end{aligned}$$

Οπότε η ζητούμενη ανισότητα γίνεται ισοδύναμα:

$$\sqrt{2}(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \leq \sqrt{x+z}+\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x+2y+2z+4\sqrt{xy}+4\sqrt{xz}+4\sqrt{yz} \leq x+z+x+y+y+z+$$

$$+2\sqrt{(x+z)(x+y)}+2\sqrt{(x+z)(y+z)}+2\sqrt{(x+y)(y+z)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{xz}) \leq \sqrt{(x+z)(y+y)}+\sqrt{(x+z)(y+z)}+\sqrt{(x+y)(y+z)} \quad (1)$$

Αλλά: $\sqrt{(x+z)(x+y)} = \sqrt{x^2+x(y+z)+yz} \geq \sqrt{x^2+2x\sqrt{yz}+\sqrt{yz}^2} = x+\sqrt{yz}$,

οπότε αντίστοιχα έχουμε:

$$\sqrt{(x+z)(x+y)}+\sqrt{(x+z)(y+z)}+\sqrt{(x+y)(y+z)} \geq$$

$$x+\sqrt{yz}+y+\sqrt{xz}+z+\sqrt{xy} \geq 2\sqrt{xy}+2\sqrt{yz}+2\sqrt{xz} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}+\sqrt{z^2} \geq \sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{xz}$$

που ισχύει από τη γνωστή ανισότητα: $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \geq \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$.

Άρα ισχύει η (Ι), άρα και η ισοδύναμη με την (Ι) αρχική και ζητούμενη.

Λύση: Γιώργος Κομπότης (Γ.Κ.)

2. Αρκεί $(\beta+\gamma)^2-\alpha^2 \geq 4\upsilon_\alpha^2 \Leftrightarrow (\beta+\gamma+\alpha)(\beta+\gamma-\alpha) \geq \dfrac{16}{\alpha^2}\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)$

$$\Leftrightarrow 4\tau(\tau-\alpha) \geq \frac{16}{\alpha^2}\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma) \Leftrightarrow \alpha^2 \geq \alpha^2-(\beta-\gamma)^2 \Leftrightarrow (\beta-\gamma)^2 \geq 0$$

Λύση: (Γ.Κ.)

3. Αν ΑΔ διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ και Θ το βαρύκεντρο τότε από θεώρημα διαμέσων στο τρίγωνο ΡΒΓ και θεώρημα Stewart στο τρίγωνο ΡΔΑ έχουμε:

i) $Ρ\Gamma^2+ΡΒ^2 = 2Ρ\Delta^2+\dfrac{\alpha^2}{2}$ ή $ΡΑ^2+ΡΒ^2+Ρ\Gamma^2 = 2Ρ\Delta^2+ΡΑ^2+\dfrac{\alpha^2}{2}$ (1)

ii) $Ρ\Delta^2\cdot\Theta Α+ΡΑ^2\cdot\Delta\Theta = Ρ\Theta^2\cdot\Delta Α+\Delta Α\cdot\Delta\Theta\cdot\Theta Α$ ή $2Ρ\Delta^2+ΡΑ^2 = 3Ρ\Theta^2+\dfrac{2}{3}\mu_\alpha^2$ (2)

Από (1), (2) έχουμε $ΡΑ^2+ΡΒ^2+Ρ\Gamma^2 = 3Ρ\Theta^2+\dfrac{\alpha^2}{2}+\dfrac{2}{3}\mu_\alpha^2$ άρα ΡΘ = ελάχιστο αρκεί $\Theta Ρ \perp ε$.

Λύση: (Γ.Κ.)

Περισσότερες λύσεις (σε 7 συνολικά προτεινόμενων) θεμάτων Μαθηματικών Διαγωνισμών - Μεγάλων, από το 1ο τεύχος, θα βρείτε στο 2ο τεύχος του «φ» (σελ. 151-180)