δημιουργικές σελίδες ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Με αφορμή την ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ ΤΡΙΩΝ ΕΙΔΙΚΩΝ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Του Νίκου Κυριαζή

1. ΓΕΝΙΚΑ

*Η μικρή εργασία αυτή προέκυψε με ερέθισμα την Πρόταση - Πρόβλημα 13 της σελίδας 148 του **2ου τεύχους** του περιοδικού "**Το Φ**" (Πρόταση του **Β. ΣΕΝΔΕΡΟΒ**).*

Περιλαμβάνει μια απόδειξη της παραπάνω Πρότασης (Πρόταση 1), μια επέκταση της ίδιας Πρότασης (Πρόταση 2) και μια άλλη Πρόταση που επινοήσαμε, ανάλογη με την Πρόταση 1 (Πρόταση 3).

Αρχίζουμε αμέσως παρακάτω με την διατύπωση και απόδειξη της Πρότασης 1, ενώ ακολουθούν οι Προτάσεις 2 και 3 με τις αποδείξεις τους, όπως και σχετικά σχόλια.

2. ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

α. Πρόταση 1 *(Του Β. ΣΕΝΔΕΡΟΒ)*

Δίνονται τρία ορθογώνια τρίγωνα με διαστάσεις όπως στο σχήμα 1. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα είναι όμοια μεταξύ τους.

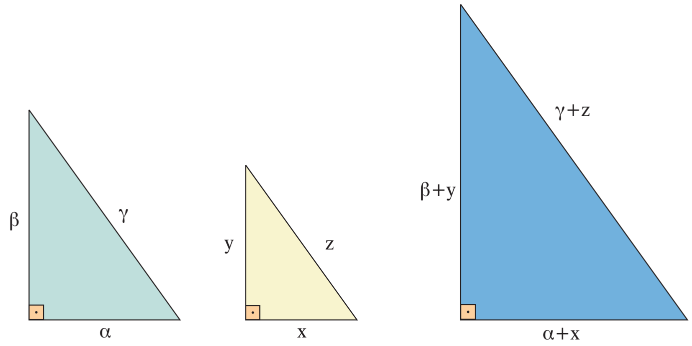
Απόδειξη

Επειδή τα τρία δοσμένα τρίγωνα είναι ορθογώνια, θα έχουμε: $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$ και

$$z^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow (\gamma z)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) \quad \text{ή} \quad (\gamma z)^2 = (\alpha x)^2 + (\alpha y)^2 + (\beta x)^2 + (\beta y)^2 \quad (1)$$

Επίσης είναι: $(\gamma + z)^2 = (\alpha + x)^2 + (\beta + y)^2 \Leftrightarrow$

$$\gamma^2 + 2\gamma z + z^2 = \alpha^2 + 2\alpha x + x^2 + \beta^2 + 2\beta y + y^2 =$$
$$(\alpha^2 + \beta^2) + 2\alpha x + 2\beta y + (x^2 + y^2) =$$
$$= \gamma^2 + 2\alpha x + 2\beta y + z^2 \quad \text{ή}$$
$$\gamma^2 + 2\gamma z + z^2 = \gamma^2 + 2\alpha x + 2\beta y + z^2 \Leftrightarrow \gamma z = \alpha x + \beta y \Leftrightarrow$$
$$(\gamma z)^2 = (\alpha x)^2 + 2\alpha x \cdot \beta y + (\beta y)^2 \qquad (2)$$



Σχήμα 1+

Έτσι από τις (1)και$(2) \Leftrightarrow (\alpha x)^2 + (\alpha y)^2 + (\beta x)^2 + (\beta y)^2 =$

$(\alpha x)^2 + (\beta y)^2 + 2\alpha y \cdot \beta x \Leftrightarrow (\alpha y)^2 + (\beta x)^2 = 2\alpha y \cdot \beta x \Leftrightarrow$

$(\alpha y)^2 - 2\alpha y \cdot \beta x + (\beta x)^2 = 0 \Leftrightarrow (\alpha y - \beta x)^2 = 0 \;\; \alpha y = \beta x \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{x} = \dfrac{\beta}{y} \quad (3).$

Ακόμη από την (3) παίρνουμε:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{x}{y} = \frac{\alpha + x}{\beta + y} \quad (4)$$

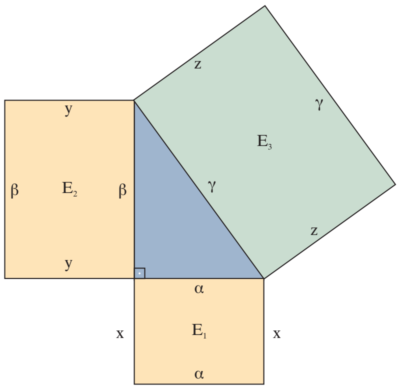
Η τελευταία σχέση (4) φανερώνει ότι και τα τρία δοσμένα τρίγωνα είναι όμοια, καθώς αυτά είναι και ορθογώνια.

β. Πρόταση 2 *(Επέκταση της Πρότασης 1)*

Δίνονται τρία ορθογώνια τρίγωνα με μήκη πλευρών όπως στο σχήμα 1. Με βάσεις τις πλευρές του πρώτου τριγώνου και με ύψη τις ομόλογες πλευρές του δεύτερου τριγώνου, κατασκευάζουμε ορθογώνια παραλληλόγραμμα, όπως στο σχήμα 2. Να αποδειχθεί ότι:

1) Το ορθογώνιο της υποτείνουσας έχει ίσο εμβαδόν με το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων των δύο καθέτων πλευρών ($E_3 = E_1 + E_2$).

2) Το ίδιο ισχύει και για τα ορθογώνια που κατασκευάζονται με βάσεις τις πλευρές του πρώτου τριγώνου και ύψη τις ομόλογες πλευρές του τρίτου τριγώνου. Ακόμη, να αποδειχθεί ότι το ίδιο ισχύει, σε αναλογία με το πρώτο τρίγωνο, και για καθένα από τα υπόλοιπα δύο τρίγωνα.



Σχήμα 2

Απόδειξη

1ος τρόπος *(αναλυτικός)*

Για το πρώτο τρίγωνο. Αποδεικνύουμε όπως στην απόδειξη της Πρότασης 1 ότι: $\gamma z = \alpha x + \beta y$ (1), οπότε πραγματικά είναι: $E_3 = E_1 + E_2$. Ακόμη είναι:

$$\gamma(\gamma + z) = \gamma^2 + \gamma z \overset{(1)}{=} (\alpha^2 + \beta^2) + (\alpha x + \beta y) \;\; \text{ή} \;\; \gamma(\gamma + z) = \alpha(\alpha + x) + \beta(\beta + y) \quad (2)$$

Περισσότερα (σελ. 69 - 78) στο 3ο τεύχος του “φ”