Λύση εξισώσεων με ανισότητες

Γ. Τσαπακίδης

Η κλασική Άλγεβρα συνδέεται ιστορικά με τη λύση εξισώσεων. Έτσι το μεγαλύτερο μέρος της σχολικής Άλγεβρας, όπως είναι φυσικό, αναφέρεται στις εξισώσεις. Αλλά οι εξισώσεις αυτές είναι τετριμμένες, λύνονται με απλούς αλγορίθμους, με αποτέλεσμα να μη προκαλούν το ενδιαφέρον των μαθητών. (Ίσως η διδασκαλία απλών συνηθισμένων ασκήσεων και προβλημάτων, που δεν έχουν το στοιχείο της πρόκλησης, να είναι ένα από τα βασικά αίτια τις αδιαφορίας μεγάλου ποσοστού ικανών μαθητών για τα σχολικά μαθηματικά).

Οι εξισώσεις που προτείνονται για λύση σε διάφορα μαθηματικά περιοδικά λύνονται με ευφυείς μετασχηματισμούς. Στο άρθρο αυτό θα μελετήσουμε εξισώσεις που λύνονται με τη βοήθεια ανισοτήτων. Έτσι, για μια ακόμη φορά, γίνεται φανερή η διασύνδεση και η αλληλεπίδραση διαφορετικών εννοιών και ενοτήτων της Άλγεβρας, πράγμα που εξ' άλλου, συμβαίνει και γενικότερα, ανάμεσα στους διάφορους κλάδους των μαθηματικών.

1 Λύστε στο R την εξίσωση: $3^{1/x}\cdot x + 3^x\cdot\dfrac{1}{x} = 6$

Σκέψεις

Η εξίσωση είναι ιδιόμορφη

Δε φαίνεται να ανάγεται σε εξίσωση γνωστής μορφής με κάποιο μετασχηματισμό.

Παρατηρούμε προσεκτικά την εξίσωση.

1. Παρατήρηση

Πρέπει $x > 0$, γιατί για $x < 0$ το πρώτο μέλος της εξίσωσης είναι αρνητικό και το δεύτερο θετικό.

2. Παρατήρηση

Οι εκθέτες εναλλάσσονται με τους συντελεστές των δυνάμεων του πρώτου μέλους.

Απομονώνουμε τους συντελεστές του πρώτου μέλους: $x + \dfrac{1}{x}$.

– *Τι είναι η παράσταση αυτή;*

Άθροισμα δύο αντιστρόφων θετικών αριθμών.

– *Τι γνωρίζουμε για το άθροισμα των αντιστρόφων δύο θετικών αριθμών;*

Ότι είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το 2, δηλαδή $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$.

– *Από ποια γενικότερη ανισότητα προκύπτει η προηγούμενη;*

Από την $\alpha + \beta \geq 2\sqrt{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta \geq 0)$ για $\alpha = x$ και $\beta = \dfrac{1}{x}$.

Παρατηρούμε ότι $3^x \cdot 3^{1/x} = 3^{x+1/x}$ και έτσι τίθεται το ερώτημα αν είναι δυνατή η εφαρμογή της $\alpha + \beta \geq 2\sqrt{\alpha\beta}$ στο πρώτο μέλος της εξίσωσης.

Είναι: $6 = 3^{1/x}x + 3^x\dfrac{1}{x} \geq 2\sqrt{3^{1/x}x3^x\dfrac{1}{x}} =$

$2\sqrt{3^{(1/x)+x}} \geq 2\sqrt{3^2} = 6.$

Επομένως πρέπει να ισχύει παντού το = .

– *Πότε ισχύει το = στην $\alpha + \beta \geq 2\sqrt{\alpha\beta}$;*

Όταν $\alpha = \beta$. Έτσι έχουμε τη:

Λύση

Πρέπει $x \neq 0$.

Για $x < 0$ το πρώτο μέλος της εξίσωσης γίνεται αρνητικό, άτοπο, αφού το ίσο του δεύτερου μέλους είναι θετικό. Επομένως πρέπει $x > 0$.

Για $x > 0$ έχουμε:

$$6 = 3^{1/x}x + 3^x\frac{1}{x} \geq 2\sqrt{3^{1/x}x3^x\frac{1}{x}} = 2\sqrt{3^{x+1/x}} \geq 2\sqrt{3^2} = 6$$

(αφού $\alpha + \beta \geq 2\sqrt{\alpha\beta}$, με $\alpha, \beta \geq 0$)

$$\left.\begin{array}{l} \text{έτσι πρέπει } 3^{1/x}x + 3^x\frac{1}{x} = 2\sqrt{3^{1/x}x3^x\frac{1}{x}} \\ \text{και} \\ x + \frac{1}{x} = 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 3^{1/x}x = 3^x\frac{1}{x} \\ \text{και} \\ x = \frac{1}{x} \end{array}\right\} (\text{αφού } \alpha + \beta = 2\sqrt{\alpha\beta} \Leftrightarrow \alpha = \beta).$$

Η δεύτερη εξίσωση έχει λύση $x = 1$ (γιατί $x > 0$), που επαληθεύει την πρώτη εξίσωση, άρα η λύση της δεδομένης εξίσωσης είναι: $x = 1$.

2 Λύστε στο R την εξίσωση:

$$(5y^2 - 2y + 3)(4x^2 - 12x + 9) + (9y^2 + 30y + 25)(7x^2 - 5x + 4) = 0$$

Σκέψεις

Έχουμε να λύσουμε μια εξίσωση με δύο αγνώστους. Συνήθως οι εξισώσεις αυτές έχουν άπειρες λύσεις. Για παράδειγμα, η $2x + 3y = 7$ έχει τις άπειρες λύσεις $x = \frac{7 - 3y}{2}$ και $y \in R$.

– Ποιο είναι το χαρακτηριστικό γνώρισμα της δεδομένης εξίσωσης;

Τα γινόμενα των τριωνύμων του πρώτου της μέλους. Είναι φυσικό να προσπαθήσουμε να παραγοντοποιήσουμε τα τριώνυμα της εξίσωσης, για να δούμε αν παραγοντοποιείται το πρώτο της μέλος.

Το $5y^2 - 2y + 3$ έχει $\Delta = -56 < 0$, άρα $5y^2 - 2y + 3 > 0$ για κάθε $y \in R$.

Είναι $4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2 \geq 0$.

Είναι $9y^2 + 30y + 25 = (3y + 5)^2 \geq 0$.

Το $7x^2 - 5x + 4$ έχει $\Delta = -31 < 0$, άρα $7x^2 - 5x + 4 > 0$ για κάθε $x \in R$. Έτσι $(5y^2 - 2y + 3)(4x^2 - 12x + 9) + (9y^2 + 30y + 25)(7x^2 - 5x + 4) \geq 0$, το = ισχύει όταν:

$4x^2 - 12x + 9 = 0$ και $9y^2 + 30y + 25 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ και $y = -\frac{5}{3}$.

Τώρα η διατύπωση της λύσης της εξίσωσης είναι εμφανής.

3 Λύστε στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ την εξίσωση:

$$\eta\mu x - \eta\mu\frac{x}{2} + \eta\mu\frac{x}{3} - \eta\mu\frac{x}{4} + \eta\mu\frac{x}{5} - \eta\mu\frac{x}{6} = 0$$

Σκέψεις

Έχουμε να λύσουμε μια τριγωνομετρική εξίσωση. Πρέπει να την αναγάγουμε στη βασική εξίσωση: ημx = ημθ, αυτό όμως φαίνεται ακατόρθωτο. Ας παρατηρήσουμε προσεκτικά την εξίσωση.

1. Παρατήρηση

Περιέχει μόνο ημίτονα.

2. Παρατήρηση

Οι λύσεις της εξίσωσης ζητιούνται στο $(0, \frac{\pi}{2})$.

– *Ποιό είναι το χαρακτηριστικό γνώρισμα της $f(x) = \eta\mu x$ στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;*

Περισσότερα (σελ. 87 - 93) στο 3ο τεύχος του "φ"