Προβολή Διανύσματος σε Διάνυσμα

Δρ. **Ηλίας Κανδυλάκης**

Στο βιβλίο των Μαθηματικών της θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης Β΄ Λυκείου του Ο.Ε.Δ.Β. αποδεικνύεται η κατωτέρω (πεπλεγμένη) σχέση για την προβολή διανύσματος:

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{v}=\vec{\alpha}\cdot\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v} \quad \text{με} \quad \vec{\alpha}\neq\vec{0} \qquad (1)$$

Φυσική ερμηνεία:

Είναι γνωστό ότι στο έργο μιας δύναμης συνεισφέρει μόνο η επιτρόχια συνιστώσα της δύναμης

$$\left(W_{\vec{F}}=\vec{F}\cdot\vec{x}=\vec{F}_{//}\cdot\vec{x}=F_{//}\cdot x\right)$$

Η κεντρομόλος συνιστώσα δεν παράγει έργο $(W_{\vec{F}_1}=0)$, όπως καθ' ολοκληρίαν συμβαίνει στην περίπτωση της κυκλικής κίνησης.

Επίλυση της εξίσωσης:

Μπορούμε να δούμε ότι η προβολή δίνεται από τον τύπο:

$$\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{v}}{|\vec{\alpha}|^2}\vec{\alpha} \qquad (2)$$

Απόδειξη:

Επειδή η προβολή είναι της μορφής $\lambda\vec{\alpha}$, από τη σχέση (1) προκύπτει αμέσως ότι:

$$\lambda=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{v}}{|\vec{\alpha}|^2}$$

Παραδείγματα υπολογισμού:

1) $\text{προβ}_{\vec{i}}\left(3\vec{i}+5\vec{j}\right)=3\vec{i}$

2) $\text{προβ}_{\vec{i}+\vec{j}}\vec{i}=\frac{1}{2}\left(\vec{i}+\vec{j}\right)$

Ιδιότητες:

Με την βοήθεια της (2) είναι απλό να αποδειχτούν:

i) $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\lambda\vec{v}=\lambda\cdot\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}$ αν $\lambda\in\mathbb{R}$

ii) $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{u}+\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}$

iii) $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\lambda\vec{\alpha}=\lambda\vec{\alpha}$ αν $\lambda\in\mathbb{R}$

v) $\text{προβ}_{\mu\vec{\alpha}}\vec{v}=\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}$ αν $\mu\in\mathbb{R}^*$

$$\left.\begin{array}{ll}\textbf{vi)} & \text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}=\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{v}\Leftrightarrow\vec{\alpha}//\vec{\beta}\\ \textbf{vii)} & \text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}=\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{u}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\perp\vec{u}-\vec{v}\\ \textbf{viii)} & \text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}//\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{u}\Leftrightarrow\vec{\alpha}//\vec{\beta}\\ \textbf{ix)} & \text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}\perp\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{u}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\end{array}\right\}\text{αν } \vec{v}\neq\vec{0} \text{ και } \vec{u}\neq\vec{0}$$

x) $\left|\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}\right|=\left|\vec{v}\right|\cdot\left|\text{συν}(\widehat{\vec{\alpha},\vec{v}})\right|$

xi) $\left|\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}\right|=\left|\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{v}\right|\Leftrightarrow\vec{v}$ πάνω στη διχοτόμο της $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$ ή $(\widehat{-\vec{\alpha},\vec{\beta}})$

xii) $\vec{v}=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{v}}{|\vec{\alpha}|^2}\cdot\vec{\alpha}+\frac{\vec{\beta}\cdot\vec{v}}{|\vec{\beta}|^2}\cdot\vec{\beta}$ αν $\vec{\alpha}\nparallel\vec{\beta}$

xiii) $\vec{v}=|\vec{v}|\cdot(\text{συν}\varphi)\vec{i}+|\vec{v}|\cdot(\text{ημ}\varphi)\vec{j}$ με $\hat{\varphi}=(\widehat{\vec{v},\vec{i}})$.