Η απόδειξη στο καλειδοσκόπιο[1]

Του Ευγένιου Αγγελόπουλου
Καθηγητή Μαθηματικών στο Ε.Μ.Π.

Εφόσον μιλώ μετά από φιλόσοφους, ας διευκρινίσω ότι θα μιλήσω ως μαθηματικός. Και μάλιστα, μια που κάποιοι προηγούμενοι αναφέρθηκαν στον Αλτουσέρ, ο οποίος είχε γράψει και ένα βιβλίο με τίτλο "Φιλοσοφία και αυθόρμητη φιλοσοφία των επιστημόνων", θα μιλήσω με βάση την αυθόρμητη φιλοσοφία ενός μαθηματικού, που βγαίνει από μία εμπειρία διδασκαλίας και έρευνας.

Ας ξεκινήσω υιοθετώντας την εξής θέση:

Η μαθηματική λειτουργία είναι η ίδια σε όποιο επίπεδο μαθηματικής γνώσης και αν βρίσκεται κανείς.

Τα μαθηματικά ασχολούνται με τις έννοιες, τις σχέσεις τους και τις ιδιότητές τους[2] . Ξεκινώντας από κάποια δεδομένα, διατυπώνονται ερωτήματα και ζητούνται απαντήσεις βάσει κάποιων κανόνων μετάβασης. Οι απαντήσεις με τη σειρά τους, γεννούν άλλα ερωτήματα στα οποία θα δοθούν άλλες απαντήσεις, και τελειωμός δεν υπάρχει. Το πέρασμα από το ερώτημα στην απάντηση είναι η απόδειξη.

Η μαθηματική λειτουργία περιέχει βέβαια και άλλα στοιχεία: εισαγωγή νέων όρων, αναδιατύπωση προγενέστερων όρων, κριτική και επεξεργασία αποδεικτικών κανόνων, κτλ. Η απόδειξη όμως είναι η βασική διαδικασία, αυτό που συνδέει τις προτάσεις μεταξύ τους, που πραγματοποιεί στα μαθηματικά τη σχέση αιτίου-αιτιατού, χωρίς την οποία θα είχαμε απλώς παράθεση αποτελεσμάτων.

Όταν λέμε απόδειξη εννοούμε κάτι το αρκετά σύνθετο. Αν στον τίτλο της ομιλίας μου έβαλα τη λέξη "καλειδοσκόπιο", είναι γιατί το καλειδοσκόπιο ανασυνθέτει συμμετρικά μια εικόνα σε πολλές κατευθύνσεις, οργανωμένες αφενός διαδοχικά και αφετέρου σε διαμετρικά αντίθετα ζεύγη, σε δίπολα... Και η έννοια αυτή καθεαυτή της απόδειξης μπορεί να ιδωθεί μέσα από πολλά αντιθετικά ζεύγη. Κάποια από αυτά τα δίπολα θα παρουσιάσω εδώ σήμερα.

1. Πρόκειται για (εκ των υστέρων) απόδοση (μαγνητοφωνημένης) ομιλίας που δόθηκε στη Θεσσαλονίκη, στα πλαίσια του 2ου Διημέρου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του ΑΠΘ, με θέμα "Το επιχείρημα και η απόδειξη στα σχολικά Μαθηματικά", 15-16 Μαρτίου 2003. Την απομαγνητοφώνηση έκανε η Μαλβίνα Παπαδάκη, την οποία και ευχαριστώ. Ευχαριστώ επίσης και τους Άρι Αραγεώργη και Δημήτρη Χασάπη για τη συνεισφορά τους στο παρόν κείμενο.
2. Διαφοροποιώ τις λέξεις σχέση και ιδιότητα, παρόλο που στα μαθηματικά οι δύο λέξεις συγχέονται (από κάποιο σημείο και μετά): η σχέση $\alpha=\beta$ μπορεί να θεωρηθεί ως ιδιότητα του ζεύγους (α,β), θεωρούμενου ως ένα αντικείμενο, και αντίστροφα μια ιδιότητα μπορεί να θεωρηθεί ως μονομελής σχέση. Οι έννοιες του "ένα" και του "πολλά" αποκτούν σχετικό περιεχόμενο: ένα τρίγωνο είναι ένα; είναι τρία; Πότε ένα πότε τρία, αναλόγως; Αλλά ας μη συνεχίσω προς αυτή την κατεύθυνση.

1) Η απόδειξη είναι γλωσσική ή μαθηματική διεργασία;

Προφανώς και τα δύο: Η μία προϋποθέτει την άλλη. Η μαθηματική απόδειξη είναι κωδικοποίηση της γλωσσικής απόδειξης. Για να περιοριστούμε στη δικιά μας κουλτούρα, η απόδειξη εμφανίζεται στην αρχαία Ελλάδα, συνοδεύοντας το δημόσιο λόγο, ως επιχείρημα, ως εργαλείο της πειθούς, ως ρητορική. Με το Σωκράτη και τους σοφιστές. Ακολουθούν οι κωδικοποιητές, από τον Αριστοτέλη μέχρι τους σύγχρονους ερευνητές που ερευνούν, π.χ., την "αυτόματη" απόδειξη θεωρημάτων χωρίς ανθρώπινη παρέμβαση. Τα Μαθηματικά χρησιμοποιούν την (προγενέστερη, γλωσσική) απόδειξη ως εργαλείο από τα νηπιακά τους βήματα. Και μέσα στους αιώνες, η απόδειξη, επειδή και όταν η εξέλιξη της μαθηματικής παραγωγής και σκέψης το απαιτεί, γίνεται και αντικείμενο μελέτης και διερεύνησης (όπως άλλωστε κάθε μαθηματική διαδικασία).

Βεβαίως, η απόδειξη εξακολουθεί να χρησιμοποιείται σε εξωμαθηματικά πλαίσια. Ας δούμε κάποια παραδείγματα, νομικά ή πολιτικά παραδείγματα:

Πρώτο παράδειγμα, από τη δίκη της 17ης Νοέμβρη που πρόσφατα άρχισε, όπου ορισμένοι κατηγορούμενοι αρνούνται τη συμμετοχή τους στην οργάνωση. Οφείλουν αυτοί να αποδείξουν την αθωότητά τους, ή οφείλει η κατηγορούσα αρχή να αποδείξει την ενοχή τους; Θεωρητικά ισχύει το πρώτο, στην πράξη αυτό αμφισβητείται. Προφανώς υπάρχει πολύ μεγάλη διαφορά ανάμεσα στα δύο.

Δεύτερο παράδειγμα, το Ιράκ. Το Ιράκ οφείλει να "αποδείξει" ότι δεν έχει όπλα μαζικής καταστροφής[3] . Είναι πολύ πιο απλό να αποδείξεις ότι έχεις όπλα μαζικής καταστροφής, επιδεικνύοντας ένα[4], παρά να αποδείξεις ότι δεν έχεις, διότι πάντα θα μπορεί να πει κάποιος "τα έχει καλά κρυμμένα"...

Σε μαθηματικό ανάλογο, αυτό σημαίνει ότι είναι πιο εύκολο να αποδείξεις το αντίθετο μιας καθολικής πρότασης, δίνοντας ένα αντιπαράδειγμα, παρά να αποδείξεις μια καθολική πρόταση: στην πρώτη περίπτωση ένα αντιπαράδειγμα αρκεί, γιατί δεν απαιτείται γενίκευση· στη δεύτερη ένα παράδειγμα δεν αρκεί, γιατί η γενίκευσή του δεν είναι αυτονόητη. Το αντίθετο του "*για όλα*" είναι το "*υπάρχει κάποιο για το οποίο δεν ισχύει αυτό που λες*".

Αξιοσημείωτο από αυτή την άποψη είναι το λεγόμενο παράδοξο του Επιμενίδη: Ο Επιμενίδης είναι κρητικός και ισχυρίζεται ότι κάθε κρητικός είναι ψεύτης. *(Πας Κρης ψεύτης)* Αλλά, όντας κρητικός ο ίδιος, λέει ψέματα. Άρα κάθε κρητικός δεν είναι ψεύτης. Άρα ο Επιμενίδης λέει αλήθεια, άρα κάθε κρητικός είναι ψεύτης...

Η "απόδειξη" αυτή είναι λάθος. Γιατί; Γιατί η άρνηση του "κάθε κρητικός είναι ψεύτης" είναι "υπάρχουν κρητικοί που δεν είναι ψεύτες". Αυτό δεν σημαίνει ότι όλοι οι κρητικοί είναι ειλικρινείς, αλλά ότι υπάρχουν κάποιοι κρητικοί που δε λένε ψέματα (όχι βέβαια ο ψεύτης Επιμενίδης). Δηλαδή καταλήγουμε "ο Επιμενίδης λέει ψέματα ότι όλοι οι κρητικοί είναι ψεύτες. Υπάρχουν και κρητικοί που λένε την αλήθεια". Άρα δεν υπάρχει παράδοξο από τη σκοπιά της Μαθηματικής Λογικής, δεν υπάρχει φαύλος κύκλος. Κι όμως ένας ικανός ρήτορας μπορεί να πείσει ένα ανυποψίαστο ακροατήριο ότι εδώ έχουμε παράδοξο.

Η απόδειξη στην κοινή γλώσσα δεν είναι το ίδιο πράμα με την απόδειξη σε μια μαθηματική θεωρία. Η κωδικοποίηση της απόδειξης συνίσταται στο να ξέρεις τι είδους επιχειρήματα είναι αποδεκτά και τι όχι. Και αυτό ποικίλλει ανάλογα με το θεωρητικό πλαίσιο: Υπάρχουν π.χ. συστήματα που δεν

3. Ας σημειωθεί πως η ομιλία έγινε λίγες βδομάδες πριν από την αμερικανική επίθεση.
4. Όπως π.χ. οι ΗΠΑ στη Χιροσίμα.

Ολόκληρο το άρθρο (σελ. 102 - 110)
στο 3ο τεύχος του "φ"