ΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ $\int$

Στράτος Μάκρας
Δρ. Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών
Πειραματικό Λύκειο Ιωνιδείου Σχολής Πειραιά

Εισαγωγικό Σημείωμα

Το ολοκλήρωμα είναι ένα ισχυρό μαθηματικό εργαλείο, με εξαιρετική θεωρητική και πρακτική σημασία. Οι τεχνικές των υπολογισμών είναι πολλές φορές επίπονες και μακροσκελείς. Όμως, η χρήση των ηλεκτρονικών υπολογιστών, έχει δώσει τεράστιες δυνατότητες στους αριθμητικούς υπολογισμούς, επιτρέποντάς μας έτσι, να απελευθερώσουμε χρόνο προς όφελος της θεωρητικής προσέγγισης και της κατανόησης των εννοιών.

Το εισαγωγικό μάθημα που αποτελεί το 1ο κεφάλαιο του παρόντος άρθρου έχει προετοιμαστεί σ' αυτό το πνεύμα και διδάχθηκε στους μαθητές της Γ΄ τάξης Θετικής Κατεύθυνσης του Πειραματικού Λυκείου της Ιωνιδείου Σχολής Πειραιά στις 16 Φεβρουαρίου 2004, για 50 περίπου λεπτά. Στο 2ο κεφάλαιο περιέχονται ορισμένες πληροφορίες για την σχέση του ολοκληρώματος ως διαδικασία άθροισης και της αντιπαραγώγισης. Στο 3ο περιέχεται η πλήρης απόδειξη του Θεμελιώδους Θεωρήματος του Ολοκληρωτικού Λογισμού για συνεχείς συναρτήσεις σε κλειστό διάστημα. Τέλος, στο 4ο κεφάλαιο περιέχονται τα βασικά θεωρήματα των συνεχών συναρτήσεων και, το κεφάλαιο αυτό, μπορεί να διαβαστεί ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα.

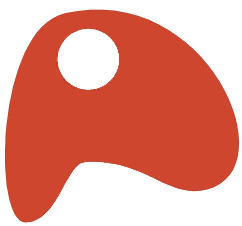
Το μόνο που χρειάζεται, για να διαβάσει κάποιος επωφελώς τα δύο τελευταία κεφάλαια, είναι καλή διάθεση και κάποια εξοικείωση με τους ε – δ συμβολισμούς και τα αντίστοιχα επιχειρήματα. Δεν χρησιμοποίησα παρά ελάχιστα την έννοια της ακολουθίας, μιας και το σχολικό πρόγραμμα περιέχει ελάχιστα πράγματα γι' αυτήν. Τα κεφάλαια αυτά απευθύνονται, πρωτίστως, στους επιμορφούμενους εκπαιδευτικούς, αλλά, και σε οποιονδήποτε άλλο μαθητή ή όχι που έχει διάθεση να τα μελετήσει.

1. ΤΟ ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Εισαγωγικό μάθημα στους μαθητές της Γ΄ Λυκείου

Η έννοια του ολοκληρώματος πηγάζει από την προσπάθεια προσδιορισμού του εμβαδού διαφόρων επιπέδων σχημάτων.

Για τα ευθύγραμμα σχήματα η διαδικασία είναι απλή: Χωρίζουμε το σχήμα σε **πεπερασμένο** πλήθος τριγώνων ή ορθογωνίων τα οποία δεν αλληλοκαλύπτονται, βρίσκουμε τα εμβαδά τους και τα αθροίζουμε. Τα πράγματα όμως δυσκολεύουν μόλις θελήσουμε να ξεφύγουμε από τα ευθύγραμμα σχήματα. Η γεωμετρική εποπτεία, μας υπαγορεύει ότι, σε κάθε κλειστό σχήμα, ευθύγραμμο ή μη, μπορεί να αποδοθεί κάποιο εμβαδόν. Ποια όμως διαδικασία πρέπει να ακολουθήσουμε για να αποδώσουμε κάποιο εμβαδόν σε σχήματα όπως στο "κόκκινο" χωρίο του διπλανού σχήματος, χωρίς να ξεφύγουμε από τον "φυσικό" τρόπο απόδοσης του εμβαδού; Τώρα, δεν μπορούμε να χωρίσουμε το σχήμα σε τρίγωνα ή ορθογώνια που δεν αλληλοκαλύπτονται, αν περιοριστούμε σε πεπερασμένο πλήθος. Προκύπτουν έτσι διάφορα ερωτήματα:



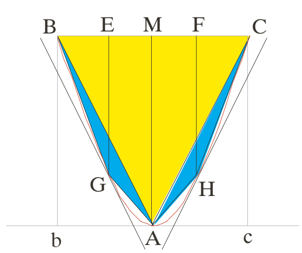
Θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε άπειρο πλήθος τριγώνων και ορθογωνίων;

Τι σημαίνει όμως άθροισμα με άπειρους προσθετέους;

Ο τρόπος διαμέρισης του αρχικού σχήματος παίζει κάποιο ρόλο;

Αυτά είναι μερικά από τα ερωτήματα που απασχόλησαν για αιώνες τους μαθηματικούς και εξακολουθούν να τους απασχολούν ακόμα! Οι προσπάθειες για να δοθούν απαντήσεις, κατέληξαν, σε θεωρίες ιδιαίτερα ενδιαφέρουσες και γόνιμες.

Οι ΄Ελληνες μαθηματικοί της Αρχαιότητας, είχαν, ήδη, λύσει το πρόβλημα για ορισμένα μη ευθύγραμμα σχήματα, όπως, π.χ. για τους μηνίσκους του Ιπποκράτη. ΄Ομως, ο πρώτος που έλυσε πραγματικά δύσκολα προβλήματα αυτού του είδους, ήταν ο Αρχιμήδης (287 π.Χ – 212 π.Χ). Ο τρόπος που ακολούθησε ο Αρχιμήδης για να υπολογίσει το εμβαδόν ενός τμήματος της παραβολής αλλά και της σπείρας που φέρει το όνομά του, εμπεριέχει την βασική ιδέα που ακολουθήθηκε, πολλούς αιώνες αργότερα, για την θεμελίωση της σύγχρονης "Θεωρίας Μέτρου". Ας παρακολουθήσουμε λοιπόν, σε αδρές βέβαια γραμμές, τον δρόμο του Αρχιμήδη για τον "τετραγωνισμό της παραβολής" δηλαδή για τον υπολογισμό του εμβαδού ενός τμήματός της.



Σχήμα 1

Περισσότερα στο 1ο τεύχος του “φ” (σελ. 23-45)