

Το εμβαδόν

ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ
ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΗ
ΣΤΟ Iο ΒΙΒΛΙΟ ΤΩΝ "ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ"



Αγγελική Σεραφίδου

Μαθήτρια της Β' τάξης

Εν. Πειραματικό Λύκ. Ιωνιδείου Σχολής Πειραιά

Εισαγωγικό σημείωμα

Β.Ε. Βισκαδουράκης

Η έννοια του εμβαδού ως "μέτρο" επιφανειών ίσως είναι μία από τις πρώτες έννοιες που ενώ προέκυψε κάτω από πρακτικές ανάγκες, είχε τέτοιο βάθος που έμελλε να παίξει, παράλληλα με την πρακτική της χρήση, ρόλο κινητήριου μοχλού για την θεωρητική ανάπτυξη των Μαθηματικών. Κι αυτή η πορεία κράτησε 25 περίπου αιώνες. Θεωρητικά μπορούμε να πούμε ότι η έννοια του εμβαδού ολοκληρώθηκε κατά τον 20ο αιώνα μέσα στα πλαίσια της Γενικής Θεωρίας Μέτρου, μιας θεωρίας στη δημιουργία της οποίας σημαντική και παγκόσμια αναγνωρισμένη ήταν η συμβολή του μεγαλύτερου νεοέλληνα και ενός από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς του 20ου αιώνα, Κωνσταντίνου Καραθεοδωρή.

Όπως συμβαίνει συνήθως, από τη στιγμή που μια θεωρία ολοκληρωθεί, τα προβλήματα που σχετίζονται με αυτήν όλοι προσπαθούν να τα αντιμετωπίσουν ως εφαρμογές της, στηριζόμενοι στα πιο χειροπιαστά αποτελέσματα της, ξεχνώντας τις αρχές και τις ρίζες της θεωρίας. Το ίδιο φαίνεται πως συμβαίνει συνήθως και με τους συγγραφείς των σύγχρονων εγχειριδίων Ευκλείδειας Γεωμετρίας, οι οποίοι σχεδόν αμέσως περνάνε στο γνωστό τυπολόγιο των εμβαδών.

Η προσέγγιση αυτή του εμβαδού τόσο από καθαρά στρουκτουραλιστική άποψη όσο και από την άποψη της διδακτικής και παιδαγωγικής, θα πρέπει να παραδεχτούμε ότι αποτελεί μια αντιδιαλεκτική αντιστροφή (όπως θα έλεγε και ο Freudenthal). Κι αυτό γιατί (όπως και στα "Στοιχεία" του Ευκλείδη παρατηρούμε), η συνθετική θεωρητική επεξεργασία και προσέγγιση της έννοιας του εμβαδού, προηγήθηκε της "μετρικής" - αναλυτικής προσέγγισης και πάνω σε αυτές τις ιδέες (π.χ. προσθετικότητα του εμβαδού) στηρίχθηκε και η σύγχρονη Θεωρία Μέτρου. Ωστόσο το θέμα δεν τίθεται για την αποκατάσταση της ιστορικής συνέχειας και διαδοχής. Πιστεύουμε πως ακολουθώντας τα βήματα του Ευκλείδη στο πρώτο βιβλίο του (προτάσεις 35-45) όπου με εξαιρετικά εμπνευσμένο αλλά και ταυτόχρονα κατανοητό από κάθε μαθητή τρόπο στήνει συνθετικά μια Θεωρία Εμβαδού "στο άψε-σβήσε", η πορεία είναι περισσότερο φυσιολογική και μέσα σε ένα παράδεισο ευκαιριών για πραγματική μαθηματική παιδεία. Ας μην ξεχνάμε ότι αυτή η

πορεία καταλήγει στην υψηλότερη κορυφή των στοιχειωδών Μαθηματικών, το Πυθαγόρειο θεώρημα (πρόταση I .47).

Με αυτήν την πεποίθηση και την επηστημολογική θεώρηση, την περασμένη χρονιά (2003-2004), διδάχθηκαν οι μαθητές δύο τμημάτων της Β΄ τάξης στο Πειραματικό Λύκειο της Ιωνιδείου Σχολής στον Πειραιά τα εμβαδά.

Αρχικά, τους είχε δοθεί ως εργασία, να αναζητήσουν και να μελετήσουν τις προτάσεις που αναφέρθηκαν λίγο πριν από τα "Στοιχεία" του Ευκλείδη. Με την πίεση όμως που νιώθουν οι μαθητές από τις απαιτήσεις των Πανελλαδικών εξετάσεων ήταν φυσικό να ανταποκριθεί ένα μέρος μόνο των μαθητών από κάθε τμήμα . Αυτό δεν εμπόδισε βέβαια και τους υπόλοιπους να μπορέσουν να παρακολουθήσουν χωρίς πρόβλημα την παρουσίαση μιας-μιας των προτάσεων με τις αποδείξεις τους στην τάξη .

Αυτή η περίτεχνη ομαλή ροή των προτάσεων με την παραγωγική διαδοχή, έκανε ιδιαίτερη εντύπωση σε όλους τους μαθητές Με τη συμμετοχή τους στις αποδείξεις των προτάσεων, έννοιωσαν να γίνονται και οι ίδιοι κοινωνοί σε αυτήν την κορυφαία εκδήλωση της μαθηματικής δραστηριότητας, στο στήσιμο δηλαδή μιας θεωρίας. Μια τέτοια αίσθηση δύσκολα μπορεί κανείς να την προκαλέσει στους μαθητές ακολουθώντας βήμα-βήμα τα συνήθως φλύαρα και "χωρίς ψυχή" εγχειρίδια της Γεωμετρίας (και όχι μόνο), τα οποία γενικά δεν είναι παρά προϊόντα συμβιβασμών πολλών αντιλήψεων και για αυτό άνευρα και άηχρα . Αντίθετα τα "Στοιχεία" του Ευκλείδη (έστω κι από μετάφραση), αποπνέουν ένα άρωμα δημιουργίας, όμοιο με αυτό του ζεστού φρεσκοξεφουρισμένου σταρένιου ψωμιού. Κι ως έχουν βγεί από το καμίνι της λογικής εδώ και 23 αιώνες.

Ιδιαίτερη αίσθηση έκανε στους μαθητές η αποτελεσματικότητα της θεωρίας "μιας" στην απόδειξη του Πυθαγορείου θεωρήματος (στο οποίο επανήλθαμε επ' ευκαιρία). Μάλιστα στο επόμενο μάθημα οι μαθητές ανταποκρίθηκαν στο σύνολο τους στην εργασία που τους ζητήθηκε για εύρεση (από τη βιβλιογραφία και το διαδίκτυο) άλλων αποδείξεων του Πυθαγορείου Θεωρήματος . Αρκετές από αυτές συζητήσαμε στην τάξη .

Μέσα από αυτή την εμπειρία προέκυψε η εργασία που ακολουθεί, από μία νεαρή λάτριδα της Γεωμετρίας . Αρχικά η Αγγελική ανέλαβε να παρουσιάσει όπως εκείνη ήθελε (και διάλεξε τα λίγα λόγια), τις προτάσεις που αναφέρονται στα εμβαδά στο βιβλίο I του Ευκλείδη, με στόχο να τις διανήσουμε σε όλους τους μαθητές . Ο χρόνος της όμως δεν επέτρεψε να πραγματοποιήσει αυτή τη σκέψη έγκαιρα . Έτσι μετά τη δοκιμασία των εξετάσεων η Αγγελική ολοκλήρωσε την προσπάθεια της και μάλιστα εμπλουτισμένη με μια προσεκτικά επιλεγμένη (από την ίδια) συλλογή προβλημάτων από αυτά που είχαμε λύσει στην τάξη (και όχι μόνο), τα οποία επιλύονται όλα χωρίς τύπους εμβαδών παρά μονάχα με τη (συνθετική) θεωρία των εμβαδών που ακολουθεί αμέσως. Για την προσπάθεια της και από τη θέση αυτήν ευχαριστούμε την Αγγελική.