ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ ∞ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΙ

Σκέψεις - Ερωτήματα - Απαντήσεις - Προτάσεις και Πολύ Διδακτικό Υλικό ...

Β.Ε. Βισκαδουράκης

Τα τελευταία χρόνια διαπιστώνεται μια αυξητική τάση συμμετοχής των μαθητών (κυρίως του Γυμνασίου) στους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς που διοργανώνει κάθε χρόνο η Ε.Μ.Ε. Ίσως η κοινωνία (ή τουλάχιστον κάποια κοινωνικά στρώματα) έχουν κατανοήσει τον κυρίαρχο ρόλο των Μαθηματικών στην εποχή μας, με αποτέλεσμα να προσανατολίζει και να ωθεί τη μαθητική νεολαία προς την κατεύθυνση του Μαραθώνιου Δρόμου των Μαθηματικών Διαγωνισμών.

Αυτός ο δρόμος για πολλούς μαθητές συχνά αποδεικνύεται τραχύς και δύσβατος. Πολλοί απογοητεύονται από την πρώτη κιόλας εμπειρία τους, με αποτέλεσμα να απομακρύνονται απ' αυτό το δύσκολο μέν αλλά και με εξαιρετικές προκλήσεις δρόμο. Για τη στάση αυτή οι μαθητές ελάχιστα ευθύνονται. Ο Μαραθώνιος είναι πολύ απαιτητικό άθλημα για να τα καταφέρει κανείς να τερματίσει χωρίς προηγουμένως να έχει συστηματικά και "επί μακρώ" προετοιμαστεί. Δεν είναι τυχαίο το γεγονός ότι κάθε χρόνο οι διακρινόμενοι μαθητές στους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς προέρχονται στην πλειοψηφία τους από ένα πολύ μικρό αριθμό ακριβοπληρωμένων Ιδιωτικών Σχολείων των Βορείων Προαστίων τη Αθήνας και της Θεσσαλονίκης.

Για παράδειγμα, στο Διαγωνισμό "Ευκλείδη" του σχολικού έτους 2001 – 02 από το σύνολο των προκριθέντων μαθητών της Αττικής, για τον τελικό Διαγωνισμό – Εθνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Αρχιμήδης", το 68% προέρχονται από αυτά τα Σχολεία και το υπόλοιπο 32% από όλα τα Δημόσια Σχολεία ολόκληρης της Αττικής. Το γεγονός αυτό σίγουρα δεν έχει μονοσήμαντη ερμηνεία. Είναι πάντως γνωστό ότι σε κάποια από τα εν λόγω

Ιδιωτικά Σχολεία οι μαθητές (όλοι) διδάσκονται δύο ώρες εβδομαδιαία Μαθηματικά για Διαγωνισμούς. Και φαίνεται πως η συστηματική αυτή βοήθεια πιάνει τόπο.

Προς το συμπέρασμα αυτό συνηγορεί και το γεγονός ότι μαθητές που παρακολουθούν αντίστοιχα μαθήματα στα κέντρα που με πρωτοβουλία της Ε.Μ.Ε. λειτουργούν τα δύο τελευταία χρόνια έχουν ιδιαίτερη επιτυχία στους Διαγωνισμούς. Μόνο που τα μαθήματα αυτά τα παρακολουθούν πολύ λίγοι μαθητές κατά κανόνα σε κάθε κέντρο. Φαίνεται πως υπάρχουν προβλήματα που πρέπει να ξεπεραστούν για να υπάρξει η επιθυμητή συμμετοχή των μαθητών σ' αυτή την προσπάθεια.

Προβλήματα που έχουν να κάνουν τόσο με εξωτερικούς παράγοντες όπως π.χ. η κατανόηση εκ μέρους της Κοινωνίας της σημασίας που μπορεί να έχει η πνευματική άμιλλα, όσο και με εσωτερικούς παράγοντες που αφορούν στην καλή οργάνωση και λειτουργία της όλης κίνησης εκ μέρους της Ε.Μ.Ε. Κυρίαρχος όμως σ' αυτή την κατηγορία παράγοντας, ο οποίος και χρήζει περαιτέρω μελέτης και επεξεργασίας κατά τη γνώμη μας, είναι η συγκρότηση ενός "σώματος" γνωστικού υλικού μέσα από το οποίο θα μπορεί να κερδηθεί η αγάπη των μικρών, ιδίως, μαθητών για έντονη πνευματική εργασία. Το εγχείρημα δεν είναι καθόλου εύκολο και είτε το συνειδητοποιεί κανείς είτε όχι, η όποια απάντηση σ' αυτό, θα έχει τη σφραγίδα της φιλοσοφίας και των γενικότερων πιστεύω που εμφορούν αυτούς που αναλαμβάνουν την εν λόγω ευθύνη.

Η εμπειρία έχει δείξει ότι η παραγωγική προσέγγιση στη Μαθηματική γνώση και η (κατά συνέπεια) τυπική και τυποποιημένη διαδικασία, "παρουσίαση της θεωρίας και εφαρμογή της στην επίλυση ασκήσεων και προβλημάτων", δεν είναι η πιο ενδεδειγμένη μέθοδος για υποκίνηση σοβαρού ενδιαφέροντος εκ μέρους των μαθητών, ιδιαίτερα σε μικρές ηλικίες. Είναι χαρακτηριστική η περιγραφή του William Thurston (βραβείο Φιλντς), καθηγητή μαθηματικών στο Princeton: "Όταν ήμουν παιδί, συχνά μισούσα την αριθμητική και τα μαθηματικά στο σχολείο. Σελίδες ασκήσεων, ανιαρές και πληκτικές. Δεν ήταν διασκεδαστικές ή προκλητικές· ήταν απλώς μια αγγαρεία. Όποτε μπορούσα, έβρισκα κάτι άλλο για να ψυχαγωγηθώ. Μουντζούρωνα, διάβαζα βιβλία κάτω από το θρανίο, ατένιζα έξω από το παράθυρο της τάξης. Καμιά φορά προσπαθούσα να βρω απάντηση σε κάποια σπαζοκεφαλιά....."

Οι εμπειρικές προσωπικές διαπιστώσεις μας ασφαλώς και δεν αποτελούν τυχαία γεγονότα. Η έντονα παραγωγική μέθοδος στη μαθησιακή διαδικασία, στις μέρες μας αμφισβητείται από πολλές Εκπαιδευτικές Έρευνες και από πολλούς εξέχοντες, παγκόσμια γνωστούς Επιστήμονες Μαθηματικούς, *Ψυχολόγους και γενικότερα Εκπαιδευτικούς ερευνητές. Στον αντίποδα, η επαγωγική προσέγγιση φαίνεται να κερδίζει όλο και περισσότερο έδαφος. Κι αυτό γιατί αφήνει περιθώρια στο μαθητή να αναπτύξει τις δικές του ενοράσεις, την ανάληψη πρωτοβουλίας, τη δημιουργική φαντασία, την ικανότητα γενίκευσης, τον αναστοχασμό και τέλος την κριτική και ελεύθερη σκέψη.*

Πολλές φορές μέσα από παραγωγικές μαθησιακές διαδικασίες αναδεικνύονται μαθητές που αν και το Εκπ/κό Σύστημα και η Κοινωνία τους θεωρεί ακόμα και μεγαλοφυΐες, δεν είναι στην ουσία τίποτα άλλο παρά υπάκουα πνεύματα τα οποία εξασκούν στο μέγιστο βαθμό την ικανότητά τους για απομνημόνευση ατέλειωτων θεωριών και "μεθοδολογιών" που τους παρέχονται έτοιμες.

Μέσα από μία άκαμπτη παραγωγική προσέγγιση των Μαθηματικών δεν είναι μόνο ότι τρομοκρατούνται και απομακρύνονται αρκετά παιδιά που αναμφίβολα έχουν άλλα ταλέντα (πέραν της απομνημόνευσης), αλλά και σε πολλά που μένουν, υπάρχει κίνδυνος συρρίκνωσης και στείρωσης της ενόρασης και της δημιουργικής τους σκέψης.

*Μια τέτοια κατάσταση περιγράφει ο **Moshe Flato** στο βιβλίο του "Η ΙΣΧΥΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ". Αναφερόμενος στην επίδραση της σχολής Μπουρμπακί λεει ότι "εσφαλμένα ζητήθηκε από νέους ανθρώπους που εμφανίζουν κάποιο ιδιαίτερο ταλέντο στα Μαθηματικά να προσανατολίσουν καταρχάς τις προσπάθειες τους στη διεύρυνση των γνώσεών τους. Τους ζητήθηκε να διαβάσουν τεράστιους όγκους βιβλιογραφίας και τους εξανάγκασαν να αποκτήσουν τον αυστηρότερο δυνατό τρόπο σκέψης". Μία τέτοια προσέγγιση αντικρούεται από τον Moshe Flato χωρίς να καταδικάζει βέβαια την εκγύμναση στην επιστημονική αυστηρότητα. "Όταν όμως η προσέγγιση που διδάσκει κανείς ακολουθεί ακλόνητα ένα σχήμα, την μετάβαση από το γενικό στο ειδικό, την παραγωγική δηλαδή μέθοδο, τότε η μελέτη των μαθηματικών καταλήγει να γίνει μία καθαρά ταλμουδική άσκηση. Τότε στερεύει και η ζωντανή φαντασία. Αλλά αυτό που μετράει στα μαθηματικά είναι η φαντασία. Το πιο πολύτιμο προσόν στα μαθηματικά είναι η φαντασία. Η έρευνα άλλωστε πραγματοποιείται συνήθως από το ειδικό στο γενικό". Και αυτό υποδεικνύει ποια είναι η φυσική οδός μέσα από την οποία οι μαθητές μας θα μυηθούν και θα κατακτήσουν τη μαθηματική γνώση.*

Αντί να δίνεται στην αρχή μια γενική δομή – θεωρία και τα παραδείγματα να εμφανίζονται μόνο ως ειδικές εφαρμογές αυτής της δομής, είναι χρήσιμο να ξεκινήσει κανείς από παραδείγματα, και στην συνέχεια να εμβαθύνει σ' αυτά. Μόνο στην βάση συγκεκριμένων παραδειγμάτων μπορεί να επιχειρήσει κανείς να δε ποιά γενική δομή είναι δυνατόν να οικοδομηθεί, ποιά θεωρία θα τους ταίριαζε και θα τα ενοποιούσε.

Ο ρόλος γενικά του συγκεκριμένου υλικού διαπραγμάτευσης κατά τη μαθησιακή – διδακτική διαδικασία όπου οι καταστάσεις (προβλήματος) είναι χειροπιαστές, οικείες και πλήρεις νοήματος για τους μαθητές, έχει ιδιαίτερα υπογραμμιστεί από τους ερευνητές. Σύμφωνα π.χ. με τους D. Tall και R. Gray τα στοιχειώδη μαθηματικά αρχίζουν με την αντίληψη και δράση επί των αντικειμένων του εξωτερικού κόσμου, σύμφωνα με το σχεδιάγραμμα:

Αντίληψη ⟶ $\boxed{\textbf{Σκέψη}}$ ⟶ **Δράση**

Κατά τον D. Tall, η γνωστική ανάπτυξη από τη στοιχειώδη στην προχωρημένη μαθηματική σκέψη στο άτομο, μπορεί να υποτεθεί ότι αρχίζει με την αντίληψη και τη δράση επί των αντικειμένων του εξωτερικού κόσμου και οικοδομείται μέσω δύο παράλληλων εξελικτικών διαδικασιών: μιας οπτικοχωρικής σε λεκτιπαραγωγική και μιας αλλεπάλληλης διαδικασίας συμπύκνωσης (encapsulation) εννοιών, χρησιμοποιώντας διαχειρήσιμα σύμβολα. Μέσω αυτών των διαδικασιών το άτομο οδηγείται στη δημιουργική σκέψη η οποία βασίζεται σε τυπικά ορισμένα αντικείμενα και στη συστηματική απόδειξη.

Πιο ειδικά, μιλώντας για προχωρημένη μαθηματική σκέψη, θα πρέπει οπωσδήποτε να μιλήσουμε για γενίκευση και αφαίρεση (αναστοχαστική).

Οι G. Harel και D. Tall ισχυρίζονται ότι η πιο ενδεδειγμένη προσέγγιση στη γενίκευση είναι η πρόκληση εμπειριών οι οποίες οδηγούν στην σε βάθος κατανόηση της τρέχουσας κατάστασης, ώστε να επιτραπεί η μετακίνηση σε πιο γενική περίπτωση.

Την ίδια προϋπόθεση θέτει και ο Von Glaserfeld για την αναστοχαστική αφαίρεση: η μετακίνηση στο πρώτο επίπεδο αφαίρεσης απαιτεί συγκεκριμένη εμπειρία.

Κατά τον Von Glaserfeld, η δύναμη της λογικής (και των παραγωγικών διαδικασιών που την αποτελούν) έγκειται στο γεγονός ότι μπορεί να οδηγήσει πολύ πιο πέρα από το πεδίο των πραγματικά βιωμένων συγκεκριμένων καταστάσεων αλλά δεν ισχύει λιγότερο το γεγονός ότι η ανάπτυξη αυτής της λογικής δε λαμβάνει χώρα απουσία της εμπειρίας.

Η δραστηριότητα του αναστοχασμού κάποιου πάνω στις νοητικές λειτουργίες του, αρχίζει με την αφαίρεση των λειτουργικών σχημάτων από τις αισθησιο – κινητικές πράξεις. Με άλλα λόγια, για να αφαιρέσει ο,τιδήποτε το υποκείμενο, θα πρέπει να έχει πρώτα την ευκαιρία να δράσει. Ωστόσο οι ευκαιρίες δράσης απαιτούν αισθησιοκινητικό υλικό και καταστάσεις κατά τις οποίες θα εκδηλωθεί η δράση πάνω σ' αυτό το υλικό.

Σχετικά με την αφαίρεση οι G. Harel και D. Tall ισχυρίζονται ότι μια αφαιρετική διαδικασία συμβαίνει όταν το υποκείμενο εστιάζει την προσοχή του σε συγκεκριμένες ιδιότητες ενός δοσμένου αντικειμένου και μετά θεωρεί αυτές τις ιδιότητες απομονωμένες από το αρχικό αντικείμενο. Αυτό μπορεί να γίνει, για παράδειγμα, για να κατανοήσει την ουσία ενός συγκεκριμένου φαινομένου· ίσως αργότερα να μπορέσει και εφαρμόσει την ίδια θεωρία σε άλλες περιπτώσεις όπου αυτή εφαρμόζεται.

Τέτοια εφαρμογή μιας αφηρημένης θεωρίας θα ήταν μια περίπτωση ανακατασκευαστικής γενίκευσης επειδή οι αφηρημένες ιδιότητες είναι ανακατασκευές των αρχικών ιδιοτήτων που τώρα εφαρμόζονται σ' ένα ευρύτερο πεδίο.

Οι Harel και Tall παρατηρούν ότι η τυπική αφαίρεση δεν είναι εύκολη υπόθεση για τους μαθητές και θέτουν το ερώτημα πως θα μπορούσαν αυτοί να βοηθηθούν για να φτάσουν στην ανακατασκευαστική γενίκευση που απαιτείται για την τυπική αφαίρεση. Στο ερώτημα αυτό οι ίδιοι ερευνητές απαντούν με την εστίαση σε συγκεκριμένο παράδειγμα που το ονομάζουν generic και το θεωρούν ως αντιπρόσωπο της αφηρημένης ιδέας ή ότι συμπυκνώνει την ουσία μιας (γενικής) απόδειξης. Για παράδειγμα η αναζήτηση του πλήθους, των σημείων τομής 10 ευθειών που τέμνονται ανά δύο, χωρίς να διέρχονται ανά τρεις από το ίδιο σημείο, ή των χειραψιών σε μια συγκέντρωση 10 ατόμων όπου όλοι αλληλοχαιρετήθηκαν, ενώ είναι συγκεκριμένα προβλήματα που επιτρέπουν και μια πειραματική προσέγγιση, η κεντρική ιδέα της λύσης τους είναι η ίδια και στην περίπτωση που αντί για συγκεκριμένο αριθμό ευθειών η ατόμων έχουμε γενικά m ευθείες ή m άτομα.

Όλες οι προαναφερθείσες απόψεις, είναι κατά τη γνώμη μας, εντελώς απαραίτητο να παρθούν υπόψη, για να καταρτιστεί ένα πρόγραμμα και ένα σώμα γνωστικού υλικού που να βοηθάει προς την κατεύθυνση να κερδιθεί το ενδιαφέρον, η αγάπη και η εργατικότητα των μαθητών, ιδίως των μικρών οι οποίοι εύκολα απογοητεύονται όταν κάτι δεν τους "πάει καλά"....

Έχοντας κατά νου αυτές τις σκέψεις δύο και πλέον χρόνια τώρα από μάθημα σε μάθημα, βδομάδα τη βδομάδα έχουμε προσεκτικά επιλέξει και διδάξει ένα εκτεταμένο υλικό για προετοιμασία μαθητών όλων των τάξεων από τη Β' γυμνασίου ως τη Β' λυκείου σε αντίστοιχα τμήματα προετοιμασίας για μαθηματικούς διαγωνισμούς (Τ.Π.Μ.Δ.) (Από τον Οκτ. 2002 μέχρι σήμερα, αρχικά στο 2ο Λύκειο Κερατσινίου και στη συνέχεια στα Πειρ. Λύκεια Ιωννιδείου, Ζάννειο και στο Ράλλειο Λύκειο Πειραιά).

Το υλικό αυτό (ή για την ακρίβεια μέρος του υλικού), κάνουμε προσπάθεια να παρουσιάσουμε όσο γίνεται ταξινομημένο, στο παρόν τεύχος, *με τη σκέψη ότι τόσο αυτό καθ' αυτό το υλικό, όσο και η δομή του, προσφέρονται ως υλικό αφετηρίας, καλύπτοντας μια πραγματική ανάγκη και για ένα ικανό χρονικό διάστημα των συναδέλφων που θέλουν να συγκροτήσουν Τ.Π.Μ.Δ., αλλά δεν το αποφασίζουν γιατί τους λείπει ένα συγκροτημένο γνωστικό υλικό πάνω στο οποίο θα εργαστούν. Και έχουν δίκιο να είναι επιφυλακτικοί. Όσοι πήραν το ρίσκο θα έχουν αντιληφθεί ότι τα πράγματα δεν είναι και τόσο απλά.*

Όσον αφορά τις λύσεις των προτεινομένων θεμάτων, υπάρχουν τρεις λόγοι για τους οποίους δεν συμπεριλαμβάνονται στο παρόν τεύχος. Ο πρώτος είναι πρακτικός (έλλειψη χώρου). Ο δεύτερος είναι γιατί για τους περισσότερους δεν είναι απαραίτητες. Και ο τρίτος είναι για να μη στερήσουμε από κανένα αναγνώστη τη χαρά της επίλυσης, ιδιαίτερα των κάπως απαιτητικών προβλημάτων.

Προβλήματα για τη Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου ...και όχι μόνο

Ξεκινώντας κανείς να κάνει μάθημα σε (μικρά) παιδιά όπως είναι της Β΄, αλλά και της Γ΄ Γυμνασίου, χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή. Πολλή θεωρία σίγουρα δεν ξέρουν, εξοικείωση με συμβολισμούς δεν έχουν, αποδείξεις (τυπικές) επίσης δεν έχουν διδαχθεί. ΄Εχουν όμως εξοικείωση με τους φυσικούς αριθμούς και σίγουρα διαθέτουν θεμελιώδεις λογικομαθηματικές ικανότητες (αυτό που μερικοί ονομάζουν φυσική σκέψη). Πάνω σ΄ αυτά τα δύο στοιχεία είναι σκόπιμο να στηρίξει κανείς τη συνεργασία του με μαθητές της Β΄ γυμνασίου σε Τμήματα Προετοιμασίας Μαθηματικών Διαγωνισμών. Και φυσικά τα υπό διαπραγμάτευση προβλήματα πάντα θα πρέπει να διακρίνονται από ένα προκλητικό – ελκυστικό (και ή δυνατόν) διασκεδαστικό χαρακτήρα. Επίσης πρέπει να είναι σαφή και πλήρη νοήματος για τους μαθητές.

Μ' αυτές τις σκέψεις πάντα κατά νου, προτείνουμε (αν βέβαια συμφωνείτε) να ξεκινήσουμε το Μαραθώνιο των Μαθηματικών Διαγωνισμών ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα – προβλήματα:

1. Βρείτε τους φυσικούς αριθμούς α, β αν ισχύουν οι ισότητες:
   (i) $(5 - \alpha) \cdot (\beta - 3) - 12$
   (ii) $(5 - \alpha) \cdot (\beta : 3) = 12$

2. Βρείτε τους φυσικούς α, β, γ αν ισχύει η ισότητα:
$$\alpha[5 + 3\beta + \gamma \cdot (34 - 28)] = 5$$

3. Το πλάτος ενός ορθογωνίου είναι 4 μονάδες, το μήκος του είναι $(2x + 2)$ μονάδες και το εμβαδόν του είναι 48 τετραγωνικές μονάδες. Πόσο είναι το x;

4. Βρείτε την τιμή του x αν $3^{x+2} = 3^x + 216$.

5. Βρείτε όλα τα ζεύγη φυσικών αριθμών α και β που ικανοποιούν τις σχέσεις:
$$6 < 2 + \alpha - \beta \text{ και } 6 < \alpha < 10.$$

※ ※ ※ ※ ※ ※ ※ ※ ※ ※ ※ ※ ※ ※ ※ ※ ※

6. Πόσοι είναι όλοι οι διψήφιοι αριθμοί;
   (i) Πόσοι απ' αυτούς έχουν ίδια και τα δύο τους ψηφία;
   (ii) Πόσοι διαφορετικά και τα δύο τους ψηφία;
   (iii) Απαντήστε στα ίδια ερωτήματα για τριψήφιους.

7. Ποιος είναι ο μικρότερος και ποιος ο μεγαλύτερος ακέραιος που μπορείτε να γράψετε με δύο μόνο ψηφία;

8. Ένας ασθενής παίρνει ένα χάπι κάθε 6 ώρες. Σε πόσες ώρες θα πάρει 12 χάπια;

9. Πόσοι ακέραιοι αριθμοί υπάρχουν μεταξύ του –2000 και του 2000;. Πόσα ψηφία χρειάζονται για να γραφτούν;

Περισσότερα (συνολικά 193 προβλήματα) δείτε στο 1ο τεύχος του "φ" (σελ. 135-149)

10. Πόσα ψηφία θα χρειαστεί ο Δήμος σας για να αριθμήσει όλα τα σπίτια ενός δρόμου αν είναι συνολικά 150;

11. Ένας τυπογράφος χρειάστηκε 4221 ψηφία για την αρίθμηση των σελίδων ενός βιβλίου. Πόσες σελίδες είχε αυτό το βιβλίο;

12. Βάλε τα ψηφία 2,4,6 στην κατάλληλη θέση ώστε να ισχύει η ανισότητα:
$$0,\square > 0,\square\square$$

※ ※ ※ ※ ※ ※ ※ ※ ※ ※ ※ ※ ※ ※ ※ ※ ※

13. Βρείτε τρεις διαδοχικούς φυσικούς με άθροισμα 159.

14. Γράψτε τον αριθμό 2002 σαν άθροισμα 13 διαδοχικών φυσικών.

15. Υπάρχουν 10 φυσικοί αριθμοί με άθροισμα 45; Αν ναι ποιοί είναι αυτοί;

16. Υπάρχουν 14 διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί με άθροισμα 91; αν ναι ποιοι είναι αυτοί;

17. Να εξετάσετε αν ο αριθμός 3^{2001} μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα 3 διαδοχικών φυσικών.

※ ※ ※ ※ ※ ※ ※ ※ ※ ※ ※ ※ ※ ※ ※ ※ ※

18. Ποια είναι η μεγαλύτερη δυνατή τιμή γραμματοσήμου που δεν μπορεί να πληρωθεί με νομίσματα αξίας 2 και 5 Ευρώ και μόνο;

19. Πώς μπορούμε να μετρήσουμε 9 λεπτά με τη βοήθεια μιας κλεψύδρας των 5 και μιάς των 7 λεπτών;

20. Έχουμε στη διάθεση μας κλεψύδρα των 4 και 7 λεπτών (όσες χρειάζονται από το κάθε