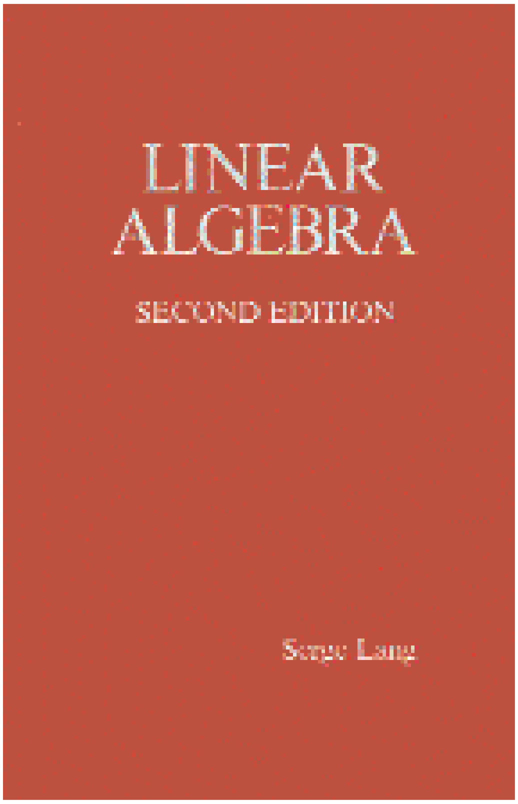

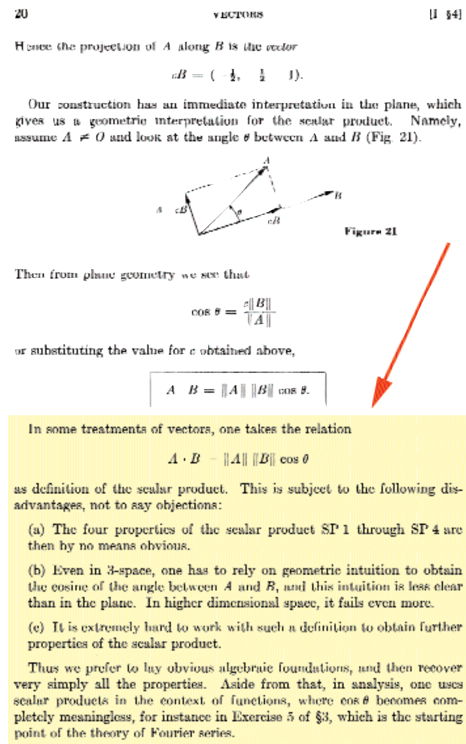

20 VECTORS [I §4]

Hence the projection of A along B is the *vector*

$$cB = (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1).$$

Our construction has an immediate interpretation in the plane, which gives us a geometric interpretation for the scalar product. Namely, assume $A \neq O$ and look at the angle θ between A and B (Fig. 21).

Figure 21

Then from plane geometry we see that

$$\cos\theta = \frac{c\|B\|}{\|A\|}$$

or substituting the value for c obtained above,

$$\boxed{A \cdot B = \|A\|\,\|B\|\cos\theta.}$$

In some treatments of vectors, one takes the relation

$$A \cdot B = \|A\|\,\|B\|\cos\theta$$

as definition of the scalar product. This is subject to the following disadvantages, not to say objections:

(a) The four properties of the scalar product SP 1 through SP 4 are then by no means obvious.

(b) Even in 3-space, one has to rely on geometric intuition to obtain the cosine of the angle between A and B, and this intuition is less clear than in the plane. In higher dimensional space, it fails even more.

(c) It is extremely hard to work with such a definition to obtain further properties of the scalar product.

Thus we prefer to lay obvious algebraic foundations, and then recover very simply all the properties. Aside from that, in analysis, one uses scalar products in the context of functions, where $\cos\theta$ becomes completely meaningless, for instance in Exercise 5 of §3, which is the starting point of the theory of Fourier series.

Β. Βισκαδουράκη, Δ. Γαβαλά, Γ. Πολύζο και Α.Σβέρκο" (τους οποίους ας σημειωθεί μόνο λόγοι διδακτικής μετάπλασης και στρουκτουραλιστικής δέσμευσης οδήγησαν στην επιλογή του ορισμού του εσωτερικού γινομένου με τη βοήθεια του συνημίτονου της γωνίας δύο διανυσμάτων κάτι που ίσως πρέπει να ξαναειδωθεί).

Οι "θεματολόγοι - εξεταστές" όφειλαν να πάρουν υπόψη τους αυτά τα (επιστημολογικά) δεδομένα και να αποφύγουν να στήσουν αυτή την παγίδα τόσο στους μαθητές όσο και στους βαθμολογητές.

Και μπορεί οι δύο ορισμοί του εσωτερικού γινομένου στους χώρους R^n με n= 1, 2, 3 να είναι ισοδύναμοι, όμως σε μεγαλύτερες διαστάσεις όπου δεν υπάρχει δυνατότητα αναπαραστάσεων, η γωνία δύο διανυσμάτων ορίζεται με τη βοήθεια του συνημιτόνου της και αυτό πάλι με την βοήθεια του εσωτερικού γινομένου. (βλ. Kostikin και Manin σελ. 118), πράγμα που καθιστά τον (κατά τους βαθμολογητές) "λάθος" ορισμό επιστημονικά και επιστημολογικά ισχυρότερο. Παρά ταύτα, κάποιοι ανήσυχοι και πιο ενημερωμένοι μαθητές, με πνεύμα αμφισβήτησης είναι πολύ πιθανόν να έχουν βαθμολογικά (τουλάχιστον) τιμωρηθεί γιατί επέλεξαν αυτόν ακριβώς τον γενικότερο και ισχυρότερο ορισμό του εσωτερικού γινομένου. Δεν είναι κρίμα;

Αλήθεια: τι σημαίνει απόδειξη;

Ένα δεύτερο περιστατικό επιστημολογικής σύγχυσης των "θεματολόγων - εξετάσεων" είναι το εξής:

Στις Γενικές Εξετάσεις της Β΄ λυκείου του, τέθηκε το εξής θέμα: *«Να αποδείξετε ότι η ακολουθία α_ν με $\alpha_\nu = 2\nu - 11$ είναι αριθμητική πρόοδος με πρώτο όρο το (– 9) και διαφορά 2».*

Οι μαθητές απάντησαν το θέμα με τρεις διαφορετικούς τρόπους. Πολύ λίγοι έδωσαν τη λύση που (μάλλον) είχαν στο νου τους οι εξεταστές:

«Για $\nu = 1$ έχουμε

$$\alpha_1 = 2 \cdot 1 - 11 = -9.$$

Επίσης:

$$\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = 2(\nu+1) - 11 - (2\nu - 11) = 2\nu + 2 - 11 - 2\nu + 11 = 2,$$

άρα αν αριθμητική πρόοδος με

$$\alpha_1 = -9 \text{ και } \omega = 2».$$

Άλλοι όμως μαθητές (οι περισσότεροι) έδιναν τη λύση:

«Αν αν αριθμητική πρόοδος με

$$\alpha_1 = -9 \text{ και } \delta = 2$$

τότε: $\alpha_\nu = -9 + (\nu - 1)2 = -9 + 2\nu - 2 = 2\nu - 11.$

Άρα η ακολουθία $\alpha_\nu = 2\nu - 11$ είναι πράγματι η αριθμητική πρόοδος με

$$\alpha_1 = -9 \text{ και } \delta = 2».$$

Επίσης αρκετοί μαθητές έδιναν την εξής λύση:

«Για την ακολουθία $\alpha_\nu = 2\nu - 11$ έχουμε:

$\alpha_\nu = 2\nu - 11 = 2\nu - 2 - 9 = -9 + 2(\nu - 1),$

άρα είναι αριθμητική πρόοδος με

$$\alpha_1 = -9 \text{ και } \omega = 2»$$

Δυστυχώς (για τη συντριπτική πλειοψηφία) των μαθητών ήρθε κάποια στιγμή στα εξεταστικά κέντρα μια παρατήρηση από την ΚΕΓΕ που «ξεκαθάριζε» ότι στο εν λόγω θέμα ζητείται απόδειξη και όχι (!) επαλήθευση. Το σύνολο σχεδόν των βαθμολογητών θεώρησε ότι η παρατήρηση αναφερόταν στη δεύτερη λύση και η συντριπτική πλειοψηφία τους και στην τρίτη.

Εδώ πραγματικά η επιστημολογική σύγχυση αναδυκνείεται και εκφράζεται σ’ όλο της το μεγαλείο. Τι είναι απόδειξη; Τι είναι επαλήθευση; Σίγουρα τα ερωτήματα αυτά είναι απαντημένα σε πολλά μυαλά (μεταξύ αυτών και των «θεματολόγων - εξεταστών») με τρόπο ατελή και μονόπλευρο, γιατί φυσικά και οι τρεις απαντήσεις στο θέμα είναι αποδεκτές.

Όταν ο μαθητής εξετάζεται στις Γενικές Εξετάσεις ξέρει ότι μπορεί να χρησιμοποιήσει όλη τη θεωρία που έχει διδαχθεί για να απαντήσει στα θέματα που του τίθενται.

Έτσι, γνωρίζοντας ότι μια αριθμητική πρόοδος καθορίζεται μονοσήμαντα όταν δοθεί ο πρώτος όρος και η διαφορά της καθώς και ότι ο γενικός όρος α_ν μιας αριθμητικής προόδου δίνεται από τον τύπο

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega,$$

είναι σίγουρος (και δικαίως) ότι η ακολουθία α_ν με

$$\alpha_\nu = -9 + (\nu - 1)2 = -9 + 2\nu - 2 = 2\nu - 11$$

είναι όντως (χωρίς καμία αμφισβήτηση) η αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1 = -9$ και $\omega = 2$. Και αυτή η συλλογιστική δεν είναι επαλήθευση. Θα ήταν επαλήθευση αν υπήρχαν και άλλες πρόοδοι (με διαφορετικό α_1 ή ω) και με γενικό όρο $\alpha_\nu = 2\nu - 11$. Όμως δεν υπάρχουν. Μεταξύ των αριθμητικών προόδων και των πρωτοβάθμιων ακολουθιών η αντιστοιχία είναι αμφιμονοσήμαντη.

Είναι φανερό ότι τα προβλήματα θα έπαυαν αυτομάτως να υπάρχουν αν το θέμα δινόταν στη μορφή:

«Να δείξετε ότι η ακολουθία αν με $\alpha_\nu = 2\nu - 11$ είναι αριθμητική πρόοδος της οποίας να βρείτε τον πρώτο όρο και την διαφορά». Να πούμε προχειρότητα; Ίσως να μπορούσαμε. Όμως ήρθε και εκείνη η «Οδηγία» με το σαφέστατο (!) περιεχόμενο: «**Θέλουμε απόδειξη, όχι επαλήθευση**».

Ε, λοιπόν, και μεις (διδάσκοντες και μαθητές), θέλουμε αποδείξεις για τη σοβαρότητα και την επάρκεια όσων αναλαμβάνουν τη σύσταση μιας τόσο σημαντικής επιτροπής όπως η Κ.Ε.Γ.Ε., αλλά και όσων επανδρώνουν τελικά την Κ.Ε.Γ.Ε.

Ζητάμε πολλά; Όχι! τα αυτονόητα ζητάμε.....

Β.Ε.Β.