αναζητώντας ? συναρτήσεις

(που ικανοποιούν δοσμένες συνθήκες)

Δημήτρης Ζούπας

Το πρόβλημα της εύρεσης συναρτήσεων κάτω από δοσμένες συνθήκες είναι ένα βασικό αντικείμενο μελέτης σ' όλη την έκταση της Μαθηματικής Ανάλυσης, από την πιο στοιχειώδη μέχρι και τις πιο προχωρημένες της περιοχές.

Έτσι θεωρούμε πως μια πρώτη εξοικείωση με το θέμα των μαθητών, που ακολουθούν Θετική και Τεχνολογική κατεύθυνση, έχει ιδιαίτερη σημασία μιας και στις σπουδές τους θα συναντούν προβλήματα σχετικά με τον προσδιορισμό συνάρτησης όλο και σε πιο προχωρημένο επίπεδο από απλές συναρτησιακές εξισώσεις μέχρι διαφορικές (απλές ή μερικών παραγώγων) και ολοκληρωτικές εξισώσεις.

Το παρόν σημείωμα αναφέρεται στην εύρεση του τύπου συνάρτησης κάτω από δοσμένες συνθήκες που τις διακρίνουμε σε τέσσερις κατηγορίες. Ο τρόπος που αντιμετωπίζουμε το πρόβλημα έχει έντονα το στοιχείο της "Ευρετικής προσέγγισης". Μέσα από συγκεκριμένα παραδείγματα νομίζουμε ότι μπορεί να αναδειχθεί μια γενική στρατηγική που χωρίς να επιλύει κάθε πρόβλημα τέτοιου είδους, είναι όμως πολλές φορές αποτελεσματική και σε τελευταία ανάλυση δεν υπερβαίνει και δεν ξεφεύγει από το θεωρητικό πλαίσιο που ορίζει η διδακτέα ύλη των Μαθηματικών Κατεύθυνσης της Γ' λυκείου.

Η κατηγοριοποίηση των παρακάτω προβλημάτων γίνεται με βάση τα δεδομένα γύρω από τη ζητούμενη συνάρτηση.

Έτσι έχουμε, προβλήματα όπου:

1. *Δίνεται ταυτότητα (για κάθε $x \in \ldots$) στην οποία "συμμετέχει" η $f(x)$.*
2. *Δίνεται ταυτότητα στην οποία "συμμετέχει" σύνθεση της $f(x)$.*
3. *Δίνεται ταυτότητα όπου συμμετέχει παράγωγος της $f(x)$.*
4. *Δίνεται ταυτότητα όπου συμμετέχει παράγωγος σύνθεσης της $f(x)$ με άλλη συνάρτηση.*

Στη συνέχεια ακολουθούν 11 λυμένα παραδείγματα. Οι λύσεις τους παρουσιάζονται κάπως "λακωνικά" και ζητάμε γι' αυτό την κατανόηση του αναγνώστη. Όμως η ποικιλία των θεμάτων και των ενδιαφερόντων του "φ" επιβάλλει νομίζουμε το "λακωνίζειν"...

Πρόβλημα 1 **Να βρεθεί συνάρτηση f αν $f^2(x) = x^2$, $\forall x \in R$.**

Λύση

Εννοείται να βρεθεί μια λύση του προβλήματος.

$$f^2(x) = x^2 \Leftrightarrow |f(x)|^2 = |x|^2 \Leftrightarrow |f(x)| = |x|$$

Μια λύση του προβλήματος είναι η $f(x) = x$ ($D_f = R$).

Πρόβλημα 2 **Να βρεθεί η συνάρτηση f αν $f^2(x) = x^2$, $\forall x \in R$.**

Λύση

Εννοείται να βρεθούν όλες οι λύσεις του προβλήματος.

$$f^2(x) = x^2 \Leftrightarrow |f(x)|^2 = |x|^2 \Leftrightarrow |f(x)| = |x| \Leftrightarrow f(x) = \pm x \ (\forall x \in R).$$

Προφανώς το πρόβλημα έχει άπειρες λύσεις. Σε κάθε συνάρτηση λύση, κάθε $\xi \in R$ έχει να "διαλέξει" για εικόνα το ξ ή το $-\xi$.

Πρόβλημα 3 **Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση f αν $f^2(x) = x^2$, $\forall x \in R$.**

Λύση

Εννοείται να βρεθούν όλες οι λύσεις του προβλήματος.

$f^2(x) = x^2 \Leftrightarrow |f(x)|^2 = |x|^2 \Leftrightarrow |f(x)| = |x|$ $(\forall x \in R)$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ και επειδή f συνεχής "διατηρεί πρόσημο" στα διαστήματα του D_f που "ορίζει" η ρίζα.

΄Ετσι $f(x) = x$ $\forall x \in (-\infty, 0)$ ή $f(x) = -x$ $\forall x \in (-\infty, 0)$.

Ομοίως $f(x) = x$ $\forall x \in (0, +\infty)$ ή $f(x) = -x$ $\forall x \in (0, +\infty)$.

΄Ετσι έχουμε τέσσερις λύσεις, όσοι και οι συνδυασμοί των ομαδικών "προτιμήσεων" των $x \in D_f$.

(i) $f(x) = x, x \in D_f$, (ii) $f(x) = -x, x \in D_f$

(iii) $f(x) = \begin{cases} -x, & x \in (-\infty, 0) \\ x, & x \in [0, +\infty) \end{cases}$ (iv) $f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\infty, 0) \\ -x, & x \in [0, +\infty) \end{cases}$

Πλήθος συνδυασμών:
Όταν τα διαστήματα είναι δύο και οι επιλογές δύο τότε το πλήθος των συνδυασμών είναι $2^2 = 4$.
Όταν τα διαστήματα είναι τρία και οι επιλογές δύο τότε το πλήθος των συνδυασμών είναι $2^3 = 8$.

Πρόβλημα 4 **Αν $(f \circ g)(x) = e^x + x^2 - 1$ και $g(x) = x - 1$ να βρεθεί η f.**

Λύση

$D_g = R$ και

$(f \circ g)(x) = e^x + x^2 - 1 \Rightarrow f(g(x)) = e^x + x^2 - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x-1) = e^x + x^2 - 1 \Rightarrow f(\omega) = e^{\omega+1} + (\omega + 1)^2 - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\omega) = e^{\omega+1} + \omega^2 + 2\omega$ $\mathbf{f(x) = e^{x+1} + x^2 + 2x}$ με $D_f = R$

΄Εθεσα $x - 1 = \omega \Rightarrow x = \omega + 1$ και έκανα αλλαγή μεταβλητής και στο τέλος έκανα αλλαγή ονόματος μεταβλητής.

Περισσότερα (συνολικά 11) προβλήματα στο 2ο τεύχος του «φ» (σελ. 77-80)