



Θέματα ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Γ. Τσικαλουδάκης

[Σ.τ.Ε] Ο συνάδελφος κ. Γ. Τσικαλουδάκης μαζί με τον 1ο τόμο από τη νέα του συγγραφική δραστηριότητα: ΘΕΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ, μας έστειλε και την παρακάτω σταχυολογημένη και πολύ ενδιαφέρουσα συλλογή θεμάτων από το βιβλίο του. Τον ευχαριστούμε πολύ και του ευχόμαστε καλή τύχη στη νέα δημιουργική προσπάθειά του.

Θέμα 1ο:

Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση “1 - 1”

- Να δώσετε τον ορισμό της f^{-1} .
- Να αποδείξετε ότι οι $C_f, C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.
- Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα, να αποδείξετε ότι και η f^{-1} είναι γνησίως φθίνουσα.

Θέμα 2ο:

Έστω f, g συναρτήσεις με πεδίο ορισμού \mathbb{R} . Να αποδείξετε ότι:

- Αν οι f, g είναι γνησίως φθίνουσες, τότε η $f \circ g$ είναι γνησίως αύξουσα.
- Αν η $f \circ g$ είναι γνησίως φθίνουσα και f γνησίως αύξουσα, τότε η g είναι γνησίως φθίνουσα.

Θέμα 3ο:

Δίνεται η συνάρτηση f με: $f(x) = x - \ln(e^{-x} - e^x)$

- Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε την f^{-1} .
- Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(y) = f(-\ln 2)$.
- Να αποδείξετε ότι οι $C_f, C_{f^{-1}}$ έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο.

Θέμα 4ο:

Έστω f συνάρτηση με πεδίο ορισμού το \mathbb{R}_+^* τέτοια ώστε για κάθε

$$x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^* \text{ με } x_1 \neq x_2 \text{ ισχύει: } f(e^{x_1} - 1) \neq f(e^{x_2} - 1).$$

Να αποδειχθεί ότι η f είναι 1 - 1.