διδακτικές ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ

Μια πρόταση για τη διδασκαλία της ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Β. Ε. Βισκαδουράκης

Εισαγωγή

Η διδακτική πρόταση που ακολουθεί δεν περιορίζεται στενά σε ότι ο τίτλος υποδηλώνει.

Με στόχο («Ιθάκη» θα λέγαμε) τη γνωριμία με τη δευτεροβάθμια συνάρτηση, μπορούμε να δούμε ως εξαιρετικές ευκαιρίες τις καλές ιδιότητες που αυτή διαθέτει και να υποκινήσουμε μια διδακτική περιπέτεια όπου το "γιατί" θα τίθεται απόλυτα φυσιολογικά, πολλές φορές και από τους ίδιους τους μαθητές· πράγμα που θα πρέπει, σύμφωνα με σύγχρονες μεθόδους διδασκαλίας, (π.χ. Ενθαρρυντική – Απαντητική μέθοδος διδασκαλίας της **Nitza Hadar**), να επιδιώκεται συστηματικά.

Ο μαθητής που θέτει μόνος του το "γιατί", αυτόματα αναλαμβάνει ένα σημαντικό μερίδιο ευθύνης για μια απάντηση· ικανοποιείται, δίνεται στο πρόβλημα έτσι που και αν ακόμα δεν καταφέρει να βρει μόνος του την απάντηση, όταν τη δει ή την ακούσει από τον διδάσκοντα ή την τάξη, την οικειοποιείται καλύτερα, συγκρίνει τη δική του προσέγγιση με των άλλων, αξιολογεί τις έξυπνες ιδέες και βελτιώνει τις δικές του στρατηγικές.

Μέσα απ' αυτό το πρίσμα, η συμμετρία της δευτεροβάθμιας συνάρτησης, οι "μεταμορφώσεις" και οι μετατοπίσεις που επιφέρουν στη γραφική της παράσταση οι μεταβολές των συντελεστών της, η συμπεριφορά της καθώς το x αυξάνει ή ελαττώνεται απεριόριστα, η ύπαρξη μέγιστης ή ελάχιστης τιμής της και η αλλαγή της μονοτονίας της, μπορούν να εκληφθούν ως "χρυσές ευκαιρίες" (και αυτό επιχειρείται παρακάτω) ώστε το ταξίδι για το στόχο να αποφέρει πολύ περισσότερα οφέλη παρά ότι αποτελεί αυτή καθ' αυτή η κατάκτηση του στόχου.

Σε πολλά σημεία παρακάτω,θα παρατηρήσει κανείς μια απόκλιση από τη μεθοδολογία που προσεγγίζουν οι επίσημες οδηγίες του **Π.Ι.** τη δευτεροβάθμια συνάρτηση, όπου η εποπτεία ανάγεται κατά κάποιο τρόπο σε κύριο και σχεδόν αποκλειστικό μέσον παραγωγής και θέσμισης της γνώσης γύρω από τη συνάρτηση αυτή. Δεν υποτιμούμε την εποπτεία, απεναντίας θεωρούμε οτι οι κάθε είδους αναπαραστάσεις των μαθηματικών εννοιών παίζουν ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο ώστε αυτές οι έννοιες να αποκτήσουν οντότητα και ύπαρξη στο νου των μαθητών.

Δε μπορούμε όμως να στηριχτούμε αποκλειστικά στην εποπτεία των εικόνων.

Οι εικόνες πολλές φορές (όπως λέει ο Αμερικανός ψυχολόγος **Zenon Pylyshyn**) είναι νοητικά αδιαπέραστες. Το συναντάμε συχνά αυτό, όταν ενώ κάποιοι μαθητές κάνουν το σχήμα σ'ενα πρόβλημα Γεωμετρίας, στη συνέχεια δεν μπορούν να αποσπάσουν απ'το σχήμα ούτε ένα"μυστικό", δεν μπορούν να κάνουν ούτε ένα βήμα γιά τη λύση του προβλήματος.

Πολύ περισσότερο,παίρνοντας έτοιμη τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης από τον Υπολογιστή ή φτιάχνοντας την ο ίδιος ο μαθητής(μηχανικά) με τη βοήθεια ενός πίνακα τιμών,αν μείνει σ' αυτήν και απλώς φαινομενολογικά εξαγάγει κάποια συμπεράσματα, χωρίς να τον απασχολήσει το γιατί,η γνώση που θα αποκομίσει θα είναι ρηχή, μικρής εμβέλειας και θα μπορεί να την αξιοποιεί και να την εφαρμόζει σε απλά μόνο και περιγραφικού -φαινομενολογικού χαρακτήρα ζητήματα.

Για παράδειγμα παρατηρώντας τις γραφικές παραστάσεις μερικών συναρτήσεων του τύπου $\mathbf{f(x) = \alpha x^2}$ με $\alpha > 0$ και μερικές με $\alpha < 0$ θα καταλήξει να μπορεί να απαντά προς τα που στρέφεται η

$$\mathbf{f(x) = 5x^2 \text{ και η } g(x) = (\lambda^2 + 1)x^2}.$$

Δεν είναι όμως καθόλου βέβαιο ότι θα μπορέσει να βρει (χωρίς τη βοήθεια του Υπολογιστή) σε ποια τεταρτημόρια εκτείνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\mathbf{h(x) = (x + 1)^2 + 3}$.

Με όλα αυτά, σε καμία περίπτωση δεν υπονοούμε την παραμέριση της εικόνας (μέσω του Υπολογιστή ή όχι). Εκείνο που επιθυμείται να τονιστεί είναι ότι η πραγματική **Μαθηματική Παιδεία** θα παραχθεί λίγο πριν και κυρίως μετά την εικόνα, μέσα από τα γιατί που θα τεθούν είτε από τον υποψιασμένο μαθητή είτε, εν ανάγκη, από τον διδάσκοντα.

Στη διδακτική προσέγγιση πάντως που στη συνέχεια προτείνεται, ο ρόλος του υπολογιστή (ή προτιμότερο ενός **Graphic Calculator**) μπορεί να είναι καταλυτικός ως προς την οικειοποίηση της ίδιας της έννοιας της συνάρτησης εκ μέρους του μαθητή, που γι'αυτόν στην οθόνη του υπολογιστή του η έννοια συνάρτηση (έννοια δύσκολη κατά γενική ομολογία) γίνεται ορατό αντικείμενο,αποκτά έστω και ηλεκτρομαγνητικά ύπαρξη και περιεχόμενο.

Γενικά, μια καλή και έγκυρη τοποθέτηση για το ρόλο του Υπολογιστή στη Μαθηματική ΄Ερευνα (και στη διδασκαλία των Μαθ/κών πιστεύουμε) είναι αυτή που περιγράφεται από το θεμελιωτή της Θεωρίας των **Fractals, Benoit Mandelbrot** όταν αυτός μιλάει για τα Πειραματικά Μαθηματικά :

*"Σύμφωνα με μια άποψη τα **Fractals** (David Mumford) και τα υπόλοιπα μαθηματικά που παρήχθησαν τις τρεις τελευταίες δεκαετίες και συνεχίζουν να παράγονται με τη βοήθεια των υπολογιστών, σηματοδοτούν ΄΄ένα σημείο καμπής στην ιστορία των μαθηματικών΄΄. Η αναγέννηση και η δυναμική πλέον παρουσία των λεγόμενων **Πειραματικών Μαθηματικών** (βλ. Journal of Experimental Mathematics) είναι γεγονός. Και λέγοντας πειραματικά μαθηματικά δεν εννοούμε την προσπάθεια εισβολής των ΄΄καθαρών΄΄ μαθηματικών στις εφαρμογές. Τα εφαρμοσμένα μαθηματικά πάντα σχετίζονταν με τις πειραματικές επιστήμες άρα και με το πείραμα. ΄Ομως ΄΄Πειραματικά Μαθηματικά΄΄ σημαίνει κάτι άλλο,διαφορετικό: Σημαίνει εισβολή του πειράματος στον πυρήνα των μαθηματικών, κάτι που μπορεί (τουλάχιστον αρχικά) να μην έχει καμία σχέση με τις εφαρμοσμένες επιστήμες.*

*Και πυρήνας των μαθηματικών είναι η απόδειξη, **αλλά προφανώς δεν περιμένουμε και ούτε θέλουμε να αντικαταστήσουμε αυτό που λέμε απόδειξη με τις εικόνες του υπολογιστή μας. ΄Ομως, οι εικόνες μπορούν να προκαλέσουν νέες ιδέες και νέους προβληματισμούς που θα βοηθήσουν στην επίτευξη ή τη βελτίωση ή την αλλαγή πορείας σε μια απόδειξη.***

Συνεισφορά, όμοια μ'αυτή που διάφορες ΄΄μηχανικές΄΄ μέθοδοι οδήγησαν στην ανεκτίμητη μαθηματική δημιουργία του **Αρχιμήδη** αλλά και του **Ευδόξου** και του **Αρχύτα** νωρίτερα, των πρώτων – και με τη σύγχρονη έννοια του όρου – Μεγάλων Πειραματικών Μαθηματικών".

"Πολλές πεποιθήσεις αρχικά μου δημιουργούνται με κάποια μηχανική μέθοδο, έστω και αν αύτες πρέπει να αποδειχθούν με Γεωμετρία στη συνέχεια, καθ'ότι η ανακάλυψη τους με τη μηχανική μέθοδο δε συνιστά μια αποδεκτή απόδειξη. Είναι,όμως, φυσικά ευκολότερο,όταν έχουμε προηγουμένως συμπεράνει κάποια απάντηση, μ'αυτή τη μέθοδο, στο ερώτημά μας, να παράξουμε την απόδειξη που θέλουμε παρά να πετύχουμε κάτι τέτοιο χωρίς καμιά προηγούμενη ένδειξη και γνώση για την απάντηση. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο, στην περίπτωση των θεωρημάτων ότι –

*ο όγκος του κώνου και της πυραμίδας είναι το 1/3 του όγκου του κυλίνδρου και του πρίσματος αντίστοιχα, που έχουν την ίδια βάση και το ίδιο ύψος – (τις αποδείξεις των οποίων έκανε πρώτος ο **Εύδοξος**) όχι μικρό μερίδιο τιμής πρέπει να αποδοθεί και στον **Δημόκριτο**, ο οποίος ήταν ο πρώτος που τα διατύπωσε, έστω και χωρίς απόδειξη΄΄.*

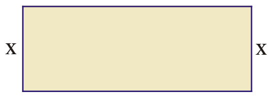
Τα λόγια αυτά θα μπορούσαν να ανήκουν σε ένα σύγχρονο επιστήμονα.Αλλά τελικά ανήκουν στον μεγάλο Αρχιμήδη, πράγμα που τους δίνει μια εξαιρετικά διαχρονική αξία.

Ερχόμαστε τώρα στο θέμα μας. Η μέθοδος διδασκαλίας που προτείνεται είναι ένας συγκερασμός της **Ενθαρρυντικής-Αποκριτικής** μεθόδου της **N. Hadar** και της μεθόδου της **Κατευθυνόμενης Ανακάλυψης**. Και οι δυο αυτές μέθοδοι διδασκαλίας προϋποθέτουν, επιδιώκουν και ενθαρρύνουν την ενεργητική συμμετοχή του μαθητή.Στο πλαίσιο αυτό αρχικά θέτουμε στην τάξη το παρακάτω εισαγωγικό ερώτημα - πρόβλημα μεγίστου. Η επιλογή δεν είναι τυχαία. Κατά τον **G. Polya** υπάρχει ένα έμφυτο ενδιαφέρον του ανθρώπου για αναζήτηση ακραίων τιμών διαφόρων μεταβλητών. Ενδιαφερόμαστε για παράδειγμα για το ελάχιστο κόστος,για τη βέλτιστη διαδρομή, για το μέγιστο έργο σε δοσμένο χρόνο,για το μέγιστο κέρδος κ.τ.λ. κ.τ.λ. Ακόμα και η Φύση λειτουργεί στη βάση αυτή (βλ. π.χ."αρχή της ελάχιστης δράσης").

Ερώτημα - Πρόβλημα

[Εισαγωγικό]

Θα αγοράζατε ένα οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου αν γνωρίζατε οτι κοστίζει 50χιλ. Ευρώ και έχει περίμετρο 100 μέτρα;



περίμετρος=100
εμβαδό=;

Μετά απο λίγα λεπτά ανεξάρτητα απο θετική ή αρνητική απάντηση, μοιράζουμε το φύλο (1) στην τάξη προτρέποντας να επιβεβαιώσουν ή να ανασκευάσουν την άποψή τους με τη βοήθεια των παραλληλογράμμων του φύλου. Στη συνέχεια τους ζητείται να συμπληρώσουν τον πίνακα που έχουν μπροστά τους με βασικό στόχο να παραχθεί ο γενικός τύπος για το εμβαδό του παρ/μμου με πλευρά ίση με x και περίμετρο p:

$$E(x) = \frac{x(p-2x)}{2} = -x^2 + 0.5px$$

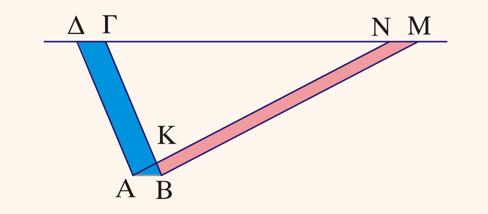
Στο σημείο αυτό,δεν θα ήταν άστοχο (απεναντίας κάπως έτσι φαίνεται να συνιστούν οι σύγχρονες αντιλήψεις την αξιοποίηση της Ιστορίας των μαθηματικών),να κάνουμε την παρακάτω ιστορική αναφορά.

Ιστορική Αναφορά

Το ότι η περίμετρος ενός σχηματος δεν καθορίζει το εμβαδό του, πριν τον Ευκλείδη δεν ήταν φαίνεται γνωστό,τουλάχιστον στους μη μαθηματικούς.Ο Θουκιδίδης αναφέρει πως σε εκστρατεία τους κατά της Σικελίας οι Αθηναίοι,έκαναν τον περίπλου του νησιού για να εκτιμήσουν την έκτασή του.Βέβαια αυτή η αναφορά ιστορικά προηγείται των "Στοιχείων" του Ευκλείδη, ο οποίος απεναντίας στις προτάσεις 35-36-37 και 38 του 1ου Βιβλίου του κάνει φανερό (χωρίς να είναι αυτός ο στόχος του), ότι η περίμετρος ενός σχήματος να είναι οσοδήποτε μεγάλη και το εμβαδό του οσοδήποτε μικρό. Αυτό για τους αμύητους φαινόταν παράδοξο("παράδοξος τόπος"). Για παράδειγμα η πρόταση 35 αναφέρει: "Αν δύο παραλ/μμα έχουν την ίδια βάση και τις απέναντι πλευρές πάνω στην ίδια παράλληλη,τότε είναι ίσα", (εννοώντας εδώ ισοεμβαδικά). (Βλ. στο διπλανό σχήμα).

Πρόταση 35η, Βιβλ. 1ο από τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη

Τα παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και ΑΒΜΝ έχουν ίσα εμβαδά."



Γιατί:

Τα τρίγωνα ΑΝΔ και ΒΜΓ είναι ίσα άρα και ισοεμβαδικά, έτσι προσθέτοντας στο καθένα το εμβ. του τριγ. ΑΒΚ και αφαιρώντας το εμβ. του τριγ. ΓΚΝ, προκύπτει ότι τα παρ/μμα ΑΒΓΔ και ΑΒΜΝ έχουν ίσα εμβαδά.

• Στη συνέχεια θεωρούμε σκόπιμο να θέσουμε στην τάξη ένα πρόβλημα Φυσικής(εντελώς άλλης φύσης απο το προηγούμενο),με σκοπό να γίνει φανερό στους μαθητές οτι η μαθηματική γνώση που διαπραγματεύεται δεν είναι κενή περιεχομένου και σημασίας.Μια τέτοια προσέγγιση (μέσα απο δυο τουλάχιστον καταστάσεις προβλήματος) προτείνει η R. Duady όταν πρόκειται να διδαχθεί μια νέα έννοια στα μαθηματικά. Σχετικά με το το ύφος του κειμένου που ακολουθεί, ο αναγνώστης μπορεί να το θεωρήσει ως μια προσομοίωση του διαλόγου που προτείνεται ν'αναπτυχθεί στην τάξη(και πειραματικά τουλάχιστον εχει επιχειρηθεί με επιτυχία). ΄Ετσι:

– Αφήνουμε όμως τώρα για την ώρα το πρόβλημα του εμβαδού για να δούμε ένα άλλο.Ενα πρόβλημα(Φυσικής, θά 'λεγαν μερικοί αλλά καλύτερα να μη βάζουμε ταμπέλα στα προβλήματα.)

Περισσότερα στο 2ο τεύχος του «φ» (σελ. 87-110)