



ΑΠΕΙΡΟΣΤΑ (II)

Τα Θεμέλια της Συννηθισμένης Ανάλυσης: το Αριθμητικό μας Σύστημα

Κοντοκόστας Σ. Δημήτριος

Δρ. Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Northeastern*

Πολυτεχνείο Θεσσαλίας

Email: dkodokostas@teilar.gr dkodokostas@alumni.nd.edu

§1. ΟΙ ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

"Ο Θεός έπλασε τους φυσικούς αριθμούς. Όλα τα άλλα τα έφτιαξε ο άνθρωπος". Η περιφνημη αυτή συνοπτική ρήση του Kronecker (1823-1891) αποτελεί την επιτομή της τρέχουσας πεποίθησης της μαθηματικής κοινότητας πως κατά βάθος οποιαδήποτε μαθηματική πρόταση ανάγεται σε κάποια άλλη πρόταση σχετικά με τους φυσικούς αριθμούς.

Τι είναι όμως οι **αριθμοί** και σε τι μας χρησιμεύουν;

Σχεδόν όλοι θα συμφωνήσουν πως οι πρώτοι αριθμοί που χρησιμοποίησαν ποτέ οι άνθρωποι είναι οι **φυσικοί** με σκοπό να μετρήσουν συλλογές αντικειμένων, αν και εκ των πραγμάτων το γεγονός αυτό θα παραμείνει για πάντα ιστορικά αναπόδεικτο. Φυσικοί είναι οι αριθμοί που τους ονομάζουμε ένα, δύο, τρία, τέσσερα, πέντε κτλ. και που για ευκολία έχουμε επινοήσει τα σύμβολα 1,2,3,4,5 κτλ. για να τους παριστάνουμε. Οι μετρήσεις γίνονται με αναφορά στο πλήθος κάποιων αντικειμένων, δίχως όμως αναφορά και στα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά τους. Έτσι για παράδειγμα ο αριθμός 5 είναι αρκετός για να χαρακτηριστεί τόσο το πλήθος των θρανίων μιας αίθουσας, όσο και το πλήθος των παιδιών που παρακολουθούν τα μαθήματα στην αίθουσα αυτή. Η χρήση μόνο μιας λέξης, της "πέντε", αρκεί και δεν υπάρχει λόγος να επινοηθούν δύο λέξεις όπως συμβαίνει σε κάποιες γλώσσες ([5]).

Από τη στιγμή που παύουμε να σχετίζουμε το 5 με πραγματικά αντικείμενα και το διατηρούμε στο μυαλό μας ως ξεχωριστή **οντότητα**, το μεταφέρουμε πια στο χώρο των **Μαθηματικών**. Αυτό όμως που δίνει στο 5 και σε όλους φυσικούς αριθμούς πραγματική μαθηματική υπόσταση είναι το γεγονός πως μπορούμε να κάνουμε αριθμητική με αυτούς. Δηλαδή κάθε φορά που δίνονται δύο φυσικοί αριθμοί μπορούμε να περιγράψουμε έναν τρόπο για να βρούμε έναν νέο φυσικό που τον ονομάζουμε άθροισμά τους, και ομοίως μπορούμε να περιγράψουμε έναν άλλο τρόπο να βρούμε έναν ακόμη φυσικό που τον ονομάζουμε γινόμενό τους. Στην αριθμητική διατυπώσουμε και νόμους στους οποίους υπακούουν οι δύο αυτοί "τρόποι" που πλέον θα τους αποκαλούμε πράξεις με τα ονόματα **άθροισμα (πρόσθεση)** και **γινόμενο (πολλαπλασιασμό)** αντιστοίχως.

* Από παραδρομή στο «φ» ο Δ. Κοντοκόστας είχε αναφερθεί ως Ph. D του Warwick. Ζητούμε συγνώμη από τον φίλο Δημήτρη.