Απόδειξη ανισοτικών σχέσεων με τη βοήθεια των Κυρτών Συναρτήσεων

Κώστας Θ. Αναγνώστου - Λαμία

Α. ΘΕΩΡΙΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα Δ. Η f είναι κυρτή στο Δ αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ και $\lambda \in [0,1]$ ισχύει

$$f\big((1-\lambda)x_1+\lambda x_2\big)\le(1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2)$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω f ορισμένη και συνεχής στο διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν $f''(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε f κυρτή στο Δ.

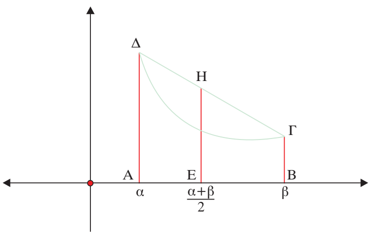
ΠΟΡΙΣΜΑ 1ο

Αν f κυρτή στο [α,β] τότε $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\le\frac{1}{2}\left[f(\alpha)+f(\beta)\right]$

Απόδειξη 1:

Από τον ορισμό για $\lambda=\frac{1}{2},\ x_1=\alpha,\ x_2=\beta$.

Απόδειξη 2



Από το παραπάνω σχήμα έχουμε:

$$EH=\frac{A\Delta+B\Gamma}{2}=\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$$

$$EZ=f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

ισχύει $EZ\le EH \Leftrightarrow f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\le\frac{1}{2}\left[f(\alpha)+f(\beta)\right]$

ΠΟΡΙΣΜΑ 2ο

Αν f κυρτή στο [α,β] τότε για κάθε $x_1,x_2,x_3,x_4\in[\alpha,\beta]$ ισχύει

$$f\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right)\le\frac{1}{4}\left[f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)\right]$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η f κυρτή στο [α,β] άρα για κάθε $x,y\in[\alpha,\beta]$ ισχύει

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\le\frac{1}{2}\left[f(x)+f(y)\right]$$

Θέτω $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ και $y=\frac{x_3+x_4}{2}$ Άρα

$$f\left(\frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}}{2}\right)\le\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+f\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right)\le\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+f\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)\right]\le$$

$$\frac{1}{4}\left[f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)\right]$$

άρα

$$f\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right)\le\frac{1}{4}\left[f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)\right]$$

ΠΟΡΙΣΜΑ 3ο

Αν f κυρτή στο [α,β] τότε για κάθε $x_1,x_2,x_3\in[\alpha,\beta]$ ισχύει:

$$f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)\le\frac{1}{3}\left[f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)\right]$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Από το πόρισμα 2 για $x_4=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$ έχω

Περισσότερα (σελ. 79 - 83) στο 3ο τεύχος του "φ"