θέματα ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Υποδείξεις ή Λύσεις θεμάτων από το 2ο τεύχος του "Φ" (σελ.81)

Γ. Τσικαλουδάκης

Οι παρακάτω υποδείξεις ή λύσεις αναφέρονται στα πιο απαιτητικά Θέματα Ανάλυσης από το 2ο τεύχος του "φ" (σελ. 81) που είχαν προταθεί από τον υπογράφοντα.

Θέμα 4ο

Για $x_1 \neq x_2$, με $x_1, x_2 > 0$ είναι $\ln(x_1+1) \neq \ln(x_2+1)$, οπότε $f\left(e^{\ln(x_1+1)}-1\right) \neq f\left(e^{\ln(x_2+1)}-1\right)$, δηλαδή $f(x_1) \neq f(x_2)$

Θέμα 7ο

i. Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$. Από (1) για $x=0$ προκύπτει $f(0)=-1$ και για $x=1$ είναι $f(1)=3$.
Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-x$ η οποία είναι συνεχής στο $[0,1]$ με $h(0)=-1<0$ και $h(1)=f(1)-1=2>0$ οπότε υπάρχει $\xi \in (0,1)$ ώστε $h(\xi)=0$ και συνεπώς $f(\xi)=\xi$.

iii. Από την (1) για $x=2$ και $x=-1$ προκύπτει $f(2)=6$ και $f(-1)=-6$ οπότε επειδή η f είναι συνεχής στο $[-1,2]$ θα ισχύει

$(f(-1)\ ,\ f(2)) \subseteq f((-1,2))$, δηλαδή είναι $(-6\ ,\ 6) \subseteq f((-1,2))$ (2)

Η (2) δηλώνει ότι για κάθε $y_o \in (-6\ ,\ 6)$ υπάρχει $x_o \in (-1,2)$ τέτοιο ώστε $f(x_o)=y_o$

iiii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x^2-x)-3x^2+2$ η οποία είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών με: $h(0)=f(0)+2=1>0$ και $h(1)=f(0)-1=-2<0$, οπότε (θ. Bolzano) υπάρχει $\rho \in (0,1)$ τέτοιος ώστε $h(\rho)=0$,
ισοδύναμα $f(\rho^2-\rho)=3\rho^2-2$.

Θέμα 8ο

Για κάθε $x \in R$ είναι $f^2(x)-4f(x).g(x)+g^2(x)=2x^2+x-3$ (1)

i. Επειδή είναι $g(0)=-1$, από την (1) για $x=0$ προκύπτει
$f^2(0)+4f(0)+4=0$, δηλαδή $f(0)=-2$.
Ομοίως επειδή είναι $g(-1)=1$, για $x=-1$ από (1) προκύπτει
$f^2(-1)-4f(-1)+3=0$, δηλαδή $f(-1)=1$ ή $f(-1)=3$.
Επομένως είναι $f(-1).f(0)<0$ και συνεπώς (θ.Bolzano) υπάρχει $x_o \in (-1,0)$, ώστε να είναι $f(x_o)=0$.

Περισσότερες λύσεις και προτεινόμενα θέματα (σελ. 95 - 101) στο 3ο τεύχος του "φ"