Λύσεις στα Προτεινόμενα θέματα Προετοιμασίας Μαθηματικών Διαγωνισμών...μικρών...

(από το 2ο τεύχος του «φ» σελ. 138)

Παναγιώτης Καντιώτος
Μαθητής Β΄ τάξης Λυκείου - Πειραιάς

1. Έστω $d_1 = 1-(m/n)$ και $d_2 = 1-(n/m)$ τότε $d_1 = |n-m|/|n|$ και $d_2 = |m-n|/|m|$.
Όμως $|n-m| = |m-n|$ άρα αφού $m<n \Rightarrow 1/|n|<1/|m| \Rightarrow d_1 < d_2$

2. $1/1001 = (1/2000) + k$, $(1/1002) = (1/2000) + m$, ..., $1/1999 = (1/2000) + n$
Επομένως
$1/1001+1/1002+...+1/2000=(1/2000)+k+(1/2000)+m+...+(1/2000)+n+(1/2000) =$
$= 1000/2000 + (k + m + ... + n) = (1/2) + \varrho>1/2$
Επίσης $1/1002 < 1/1001$ ... $1/2000 < 1/1001$
Άρα $1/1001 + 1/1002 + ... + 1/2000 < 1000/1001 < 1$

3. i. $(x + y)/2 = [1-(1/2003)]/2 = 2002/4006 = 1001/2003$
ii. $y > x \Rightarrow x <(x + y)/2 < y$

4. $11^{633} = 11^{(3 \cdot 211)}$ ενώ $37^{424} = 37^{(2 \cdot 212)}$
$11^3 = 1331$ και $37^2 = 1369$
Άρα $1331^{211} < 1369^{212} \Leftrightarrow 11^{633} < 37^{424}$

5. α. $(1/m)-(1/m + 1)<(1/n)-(1/n + 1) \Leftrightarrow (1/m) + (1/n + 1)<(1/n) + (1/m + 1) \Leftrightarrow$
$[(n + 1 + m)/m(n + 1)]<[(m + 1 + n)/n(m + 1)] \Leftrightarrow 1/(mn + m)<1/(mn + n) \Leftrightarrow$
$1/m < 1/n \Leftrightarrow m > n$ ισχύει

β. $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\dots+\frac{1}{2002}-\frac{1}{2003}<\frac{2}{5}$

$2\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\ \dots+\frac{1}{2002}-\frac{1}{2003}\right)<\frac{4}{5}$

Όμως $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

και σύμφωνα με το υποερώτημα α έχω:

$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}<\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$

$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}<\frac{1}{5}+\frac{1}{7}$

....

$\frac{1}{2002}+\frac{1}{2002}<\frac{1}{2001}+\frac{1}{2003}$

Άρα $2\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\dots+\frac{1}{2002}-\frac{1}{2003}\right)<1-\frac{1}{3}-\frac{1}{2003}$

αλλά $1-\frac{1}{3}-\frac{1}{2003}<\frac{4}{5}$ επομένως $2\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\dots+\frac{1}{2002}-\frac{1}{2003}\right)<\frac{4}{5}$

6. $\alpha-\beta-3\geq 0$

$\beta-\alpha+3\geq 0$ άρα $\alpha-\beta-3=0\Leftrightarrow\alpha=\beta+3$

Επομένως $\beta^2-9\beta+3\alpha=\beta^2-9\beta+3\beta+9=25\Leftrightarrow(\beta-3)^2=25\Leftrightarrow\beta=8$ ή $\beta=-2$

$(\alpha,\beta)=(11,8)$ ή $(1,2)$

7. $\sqrt{(x-5)^2+16}+\sqrt{(x+y-3)^2+4}=6$

Όμως η ελάχιστη τιμή του πρώτου ριζικού είναι το 4 και του δεύτερου το 2 ,άρα $x-5=0$ και $x+y-3=0$.

Άρα $x=5$ και $y=-2$

8. i. Έχω $2001+2+3+4\dots+4000=2001+2(1+2+3+\dots+2000)=$

$$2001+2\cdot\frac{2000\cdot 2001}{2}=2001+2000^2+2000=2001^2$$

ii. $\underbrace{111\dots111}_{2n\text{ ψηφία}}-\underbrace{222\dots222}_{n\text{ ψηφία}}=111\dots111\underbrace{000\dots000}_{n\text{ ψηφία}}-111=111\dots111\cdot(100\dots000-1)=111\dots111\cdot999\dots999=9\cdot\underbrace{111\dots111}_{n\text{ ψηφία}}{}^2$

Άρα και στις δύο περιπτώσεις τα υπόρριζα είναι τέλεια τετράγωνα.

9. $q^2=\frac{2002-2\sqrt{1001\cdot 2-2001}}{2}=1001-\sqrt{1001^2-2\cdot 1001+1}=$

$1001-\sqrt{(1001-1)^2}=1001-1000=1$ άρα $q=1$ (γιατί $q>0$)

Περισσότερα (συνολικά 47)
λυμένα θέματα (σελ. 154 - 16 στο 3ο τεύχος του "φ"