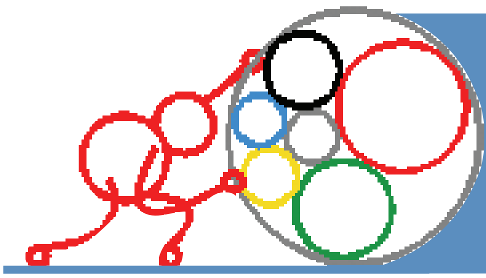

Η Ευκλείδεια Γεωμετρία
στις Βραζιλιάνικες Μαθηματικές Ολυμπιάδες

Επιλογή: Β.Ε. Βισκαδουράκης

Η μακρυνή (για μας) Βραζιλία είναι μια χώρα με αρκετά καλή θέση στην κατάταξη των χωρών στις Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες (29η στη φετεινή Δ.Μ.Ο., αλλά και με πολύ σοβαρή παρουσία στη Μαθηματική ΄Ερευνα.[*] Άρχισε να διοργανώνει Εθνικές Μαθηματικές Ολυμπιάδες περίπου την εποχή που άρχισε και η χώρα μας. Επιλέξαμε να παρουσιάσουμε θέματα Γεωμετρίας από τις Βραζιλιάνικες Μαθ/κές Ολυμπιάδες αφ' ενός για μια γνωριμία με τη Μαθηματική (Μέση) Εκπαίδευση, έστω και μέσα από θέματα Διαγωνισμών, της μεγάλης και ανερχόμενης αυτής χώρας αλλά και γιατί τα θέματα αυτά ενώ δεν είναι πολύ δύσκολα (πάντα υπάρχουν εξαιρέσεις), έχουν ένα χαρακτήρα πραγματικά «διαγωνιστικό». Απαιτούν την έμπνευση με τρόπο τόσο φυσικό όσο και όπως την απαιτούν και οι φιγούρες της Βραζιλιάνικης σάμπας.

[*] *Βλέπε πίνακα δημοσιεύσεων στα πλέον έγγυρα περιοδικά των Βραζιλιάνων ερευνητών - Μαθηματικών, στο τέλος των θεμάτων.*

1. i) Το ABCD είναι τετράγωνο πλευράς 1.
Το M είναι μέσον της πλευράς AB και το N μέσον της BC.
Οι ευθείες CM και DN τέμνονται στο I.
Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου CIN.

ii) Τα μέσα των πλευρών AB, BC, CD, DA ενός παραλληλόγραμμου ABCD είναι τα σημεία M, N, P, Q αντίστοιχα. Κάθε μέσον συνδέεται με τις δύο απέναντι κορυφές. Να δειχθεί ότι το εμβαδόν εκτός του προκύπτοντος 8 – αστεριού είναι τα 2/5 του παραλληλόγραμμου.

iii) Δίνεται ισοσκελές $\overset{\Delta}{ABC}$ (AC = CB) με βαρύκεντρο G. Δείξτε ότι το εμβαδόν του είναι το 1/3 του εμβαδού του τριγώνου ABC.

iv) Να εξετάσετε αν το (ii) ισχύει για τυχόν κυρτό τετράπλευρο ABCD.

(Θέμα 5ο 1ης Βραζιλιάνικης Μαθ/κής Ολυμπιάδας).

2. Δίνεται τρίγωνο ABC και ένα σημείο P_0 της πλευράς AB. Από το P_0 φέρνουμε κάθετη P_0Q_0 στην BC. Από το Q_0 κάθετη Q_0R_0 στην AC. Από το R_0 κάθετη R_0P_1 στην AB. Από το P_1 κάθετη P_1Q_1 στην BC. Από το Q_1 κάθετη Q_1R_1 στην AC. Από το R_1 κάθετη R_1P_2 στην AB και ούτω καθεξής. Δείξτε ότι τα σημεία P_i συγκλίνουν σε κάποιο συγκεκριμένο σημείο P της AB, το οποίο να κατασκευαστεί.

(*Θέμα 3ο, 2ης Βραζιλιάνικης Μαθ/κής Ολυμπιάδας 1980*).

3. Πάνω σε ένα φύλλο χαρτί έχετε δύο σημεία. Θέλετε να φέρετε την ευθεία που αυτά ορίζουν αλλά διαθέτετε μόνο κανόνα και διαβήτη που έχουν ο μεν κανόνας μήκος μικρότερο από το μισό της απόστασης μεταξύ των δύο σημείων και ο διαβήτης επίσης άνοιγμα μικρότερο από το μισό της απόστασης μεταξύ των σημείων. Το δίπλωμα του χαρτιού απαγορεύεται.

Πώς θα φέρετε λοιπόν την ευθεία που ορίζουν τα δύο δοσμένα σημεία;

(*Θέμα 3ο, 3ης Βραζιλιάνικης Μαθ/κής Ολυμπιάδας 1981*).

4. Τα μέτρα των γωνιών A, B, C τριγώνου ABC ικανοποιούν τη σχέση: $\frac{A}{C} = \frac{B}{A} = 2$.

Να δείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές το έγγεντρο I και τα περίκεντρα I_α, I_β του τριγώνου $\overset{\Delta}{\text{ΑΒΓ}}$, είναι ίσο με το .

(*Θέμα 1ο, 4ης Βραζιλιάνικης Μαθ/κής Ολυμπιάδας, 1982*)

5. Δίνονται n σημεία στο επίπεδο. Να δειχτεί ότι μπορούμε πάντα να βρούμε 3 απ' αυτά από τα οποία ορίζεται γωνία $\leq \frac{\pi}{\eta}$.

(*Θέμα 2ο, 7ης Βραζιλιάνικης Μαθ/κής Ολυμπιάδας 1985*).

6. Δίνεται κυρτό εγγεγραμμένο τετράπλευρο σε κύκλο ακτίνας 1. Να δείξετε ότι η περίμετρος του μειωμένη κατά το άθροισμα των δύο διαγωνίων του είναι μεταξύ 0 και 2.

(*Θέμα 3ο, 7ης Βραζιλιάνικης Μαθηματικής Ολυμπιάδας, 1985*).

7. Το επίπεδο Poincare (Πουανκαρέ) είναι ένα ανοικτό ημιεπίπεδο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που ορίζεται από μια ευθεία (R). Οι ευθείες στο μοντέλο του Poincare είναι (1) οι ημιευθείες που είναι κάθετες στην (R) και (2) τα ημικύκλια που γράφονται με κέντρα σημεία της (R).

Δείξτε ότι από δοσμένο σημείο P διέρχονται άπειρες ευθείες που δεν τέμνουν (επομένως είναι παράλληλες προς οποιαδήποτε ευθεία L που δεν περιέχει το P).

Δείξτε επίσης ότι αν ABC τρίγωνο του επιπέδου (Poincare) τότε το άθροισμα των γωνιών του ανήκει το δάστημα (0,π).

(*Θέμα 3ο, 8ης Βραζ. Μαθ. Ολυμπ. 1986*).

8. Δίνεται σημείο A στο εσωτερικό κυρτού πολυέδρου P. Δείξτε ότι πάντα υπάρχει έδρα F του P ώστε το ίχνος της κάθετης από το A στην F να βρίσκεται στο εσωτερικό της F.

(*Θέμα 2ο, 9ης Βραζ. Μαθ. Ολυμπ. 1987*).

9. Δίνεται σταθερό σημείο P του επιπέδου και για τα σημεία A, B, C δίνεται ότι: PA = 3, PB = 5, PC = 7 καθώς και ότι το εμβαδόν του

Περισσότερα (συνολικά 25) προτεινόμενα θέματα (σελ. 179 - 182) στο 3ο τεύχος του "φ"