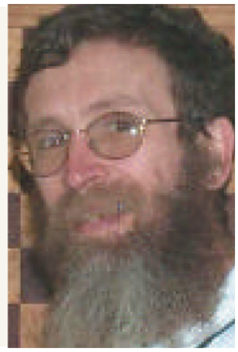
# Πώς το έκανε αυτό ο Euler;

## [How Euler Did it]



# Γεωμετρία Τριγώνου τον 19ο αιώνα

**Edward Sandifer**

Καθηγητής Μαθηματικών στο CSU
(Πολιτειακό Πανεπιστήμιο του Δυτικού Connecticut)

Μετάφραση (*): **Β.Ε.Βισκαδουράκης**
(*) Με την άδεια του καθηγητή Ed. Sandifer

Όταν διαβάζουμε για τον Euler, ή για οποιοδήποτε άλλο ιστορικό πρόσωπο, πρέπει να θυμόμαστε ότι έζησε στη δική του εποχή. Ο 18ος αιώνας ήταν πολύ διαφορετικός από τον 21ο, κατά τρόπο που δύσκολα μπορούμε να φανταστούμε. Υπάρχουν οι προφανείς διαφορές: τώρα έχουμε Διαδίκτυο, iPods, αεροπλάνα και αυτοκίνητα.

Με συγκινεί ακόμα η υπενθύμιση των σπουδαστών μου, ότι σήμερα έχουμε επίσης εσωτερικές υδραυλικές εγκαταστάσεις, πολυκαταστήματα και χαρτονομίσματα.

Έτσι όταν διαβάζουμε Euler, πρέπει να προσπαθήσουμε να καταλάβουμε πως τα προβλήματα που μελετά και οι τεχνικές που χρησιμοποιεί αντιστοιχούν στην εποχή του και όχι τη δική μας. Μιλούσε και έγραφε για ένα κοινό του 18ου αιώνα, και είμαστε τυχεροί που τα πράγματα που έλεγε είναι ακόμα χρήσιμα και ενδιαφέροντα. Έτσι όταν βρίσκουμε τον Euler να χρησιμοποιεί τεχνικές του 17ου αιώνα για να λύσει ένα πρόβλημα του 19ου αιώνα πρέπει να είμαστε προσεκτικοί.

Η εργασία - paper "Gometrica et sphaerica quaedam" [E749], του Euler (με τίτλο: "Ορισμένα Γεωμετρικά και Σφαιρικά ζητήματα") είναι ένα τέτοιο paper. Το κύριο αποτέλεσμά του, είναι ένα θεώρημα στη γεωμετρία του τριγώνου - θέμα προσφιλές και σημαντικό προς το τέλος του 19ου αιώνα.

Τα κύρια αποτελέσματα στη γεωμετρία του τριγώνου συνοψίζονται σε κάποια εξαιρετικά βιβλία όπως αυτό των Coxeter και Greitzer [C+G].

Αντίθετα, ένα από τα σημαντικότερα ζητήματα στα Μαθηματικά την εποχή του Euler, ήταν η βαθμιαία εξέλιξη, της οποίας ηγήθηκε ο ίδιος, από τα μαθηματικά που βασίζονταν σε αντικείμενα

και τεχνικές της γεωμετρίας, στα μαθηματικά που βασίζονται στην άλγεβρα και την ανάλυση. Αν και δεν είναι της παρούσης να αναλυθεί στο σημείο αυτό, αυτό το θέμα, σημειώνουμε ότι στην αρχή του 18ου αιώνα, οι μαθηματικοί ονόμαζαν τους εαυτούς τους "γεωμέτρες" και χρησιμοποιούσαν το λογισμό (calculus) για τη μελέτη καμπυλών στο ύφος του L' Hospital. Περί το τέλος όμως του ίδιου αιώνα, οι μαθηματικοί αυτοαποκαλούνταν "μαθηματικοί" και "αναλύστες" και χρησιμοποιούσαν calculus για τη μελέτη συναρτήσεων.

Στο paper E749, ο Euler δίνει τρεις αποδείξεις για ένα αποτέλεσμα του 19ου αιώνα, αλλά η τρίτη του απόδειξη, σαφώς η συμπάθειά του από τις τρεις, είναι μια απόδειξη με άρωμα του 17ου αιώνα.

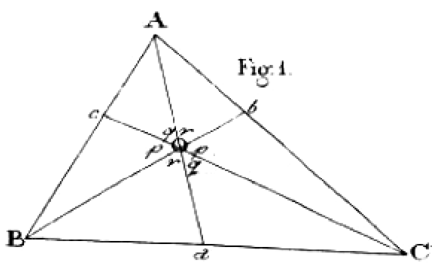
Ο Euler έγραψε αναμφίβολα το E749 κατά το 1780. Ο γαμπρός του Nicolas Fuss, το παρουσίασε στην Ακαδημία της Αγίας Πετρούπολης μαζί με τρία άλλα papers την 1η του Μάη εκείνου του έτους.

Το 1780 ο Euler ήταν ήδη 73 χρονών και δεν συμμετείχε πλέον στις συνεδριάσεις της Ακαδημίας ο ίδιος. Η τελευταία συμμετοχή του Euler σε συνεδρίαση της Ακαδημίας φαίνεται πως ήταν στις 16 Ιανουαρίου του 1777, και μετά ο Euler έστελνε στην Ακαδημία τις εργασίες του με τους βοηθούς του.

Το 1780 ο Euler ήταν ήδη τυφλός για σχεδόν 15 χρόνια και είχε μια ομάδα βοηθών στους οποίους υπαγόρευε εκατοντάδες χειρογράφων.

Ένα από τα πορτρέτα που παρουσιάζονται πιο πάνω, εικονίζει κάτω από το οβάλ μεγάλο πορτρέτο, σ' ένα μικρότερο ορθογώνιο δύο άτομα, το ένα με πένα και χαρτί, που κάθονται στο ίδιο τραπέζι. Προφανώς αυτό εικονίζει τον Euler να υπαγορεύει σ' έναν από τους βοηθούς του, πιθανά τον γυιό του Johan Albrecht, επειδή ο ίδιος ο Euler δεν μπορούσε πλέον να διαβάσει ή να γράψει.

Αλλά ας επανέλθουμε στα Μαθηματικά.




Ο Euler μας δίνει το τρίγωνο ABC που φαίνεται στο σχήμα (Fig.1 ), το οποίο κόβεται από τα συντρέχοντα τμήματα, Aa, Bb, Cc, όπου τα σημεία που σημειώνονται με τα μικρά γράμματα, ανήκουν στις πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις κορυφές που σημειώνονται με τα κεφαλαία γράμματα αντίστοιχα. Το σημείο όπου τα τμήματα συντρέχουν ονομάζεται O.

Ο Euler θέτει το ερώτημα, αν με δεδομένα τα μήκη των τμημάτων AO, Oa, BO, Ob, CO, Oc μπορεί να ανακατασκευάσει το τρίγωνο;

Διαπιστώνει ότι δε θα υπάρξει ένα τέτοιο τρίγωνο, εκτός αν συγκεκριμένες συνθήκες μεταξύ των λόγων των μηκών των τμημάτων ικανοποιούνται, και μας δίνει το εξής:

**Θεώρημα:** ***Αν σε τρίγωνο ABC αχθούν από κάθε γωνία στην απέναντι πλευρά οποιεσδήποτε ευθείες γραμμές Aa, Bb, Cc που τέμνονται σε ένα κοινό σημείο O, τότε πάντα, αυτές θα ικανοποιούν την ιδιότητα:***

$$(1)\quad \frac{AO}{Oa}\cdot\frac{BO}{Ob}\cdot\frac{CO}{Oc}=\frac{AO}{Oa}+\frac{BO}{Ob}+\frac{CO}{Oc}+2$$

Η απόδειξη του Euler είναι μάλλον εκτενής και όχι πολύ κομψή. Συζητήσαμε την παράλειψή της, αλλά τελικά αποφασίσαμε να την περιλάβουμε, ώστε αργότερα να είμαστε σε θέση να



**Περισσότερα στο 4ο τεύχος του "φ" (σελ. 55-64)**