ΑΠΕΙΡΟΣΤΑ (ΙΙΙ)

Κοντοκώστας Σ. Δημήτριος

§4. ΤΑ ΟΡΙΑ

Η έννοια του ορίου μιας ακολουθίας γίνεται ιδιαίτερα χρήσιμη όταν γενικεύεται για τις συναρτήσεις, οι οποίες με τη σειρά τους, δεν είναι τίποτε άλλο από μια γενίκευση της έννοια της ακολουθίας. Ο ορισμός που έχουμε συνήθως στο μυαλό μας για τη **συνάρτηση** είναι ακριβώς αυτός που έδωσαν οι. Lobachevsky (1793 -1856) και Dirichlet (1805 -1859) ως έναν κανόνα σύμφωνα με τον οποίο σε κάθε στοιχείο x ενός υποσυνόλου E των πραγματικών αριθμών, αντιστοιχεί ένας μοναδικός αριθμός y Την εικόνα y τη γράφουμε και ως $f(x)$ θέλοντας να δείξουμε πως προκύπτει από το x με τη βοήθεια του κανόνα -συνάρτηση f

Λέμε πως η συνάρτηση f έχει στο x_0 **όριο** το α, και γράφουμε $\lim_{x\to x_0} f(x)=\alpha$, όταν οι **τιμές** -όπως ονομάζονται- $f(x)$ είναι αυθαιρέτως κοντά στο α για όλα τα στοιχεία x του E που βρίσκονται αυθαιρέτ ως κοντά στο x_0.

Τον ορισμό μπορούμε να τον αποδώσουμε και με την αυστηρή του μορφή με τη βοήθεια των ε και δ (όπως ίσως να γνωρίζετε), αλλά αντ'αυτού αξίζει περισσότερο να σημειώσουμε πως τόσο το α όσο και το x_0 μπορούν να είναι οι **κατεκδοχήν αριθμοί** "**συν άπειρο**" και "**πλην άπειρο**" που συνηθίζουμε να συμβολίζουμε με $+\infty$ και $-\infty$. Αυτοί δεν ανήκουν στου ς πραγματικούς αριθμούς, και συνήθως τους χρησιμοποιούμε ως σύμβολα για τη συνοπτική διατύπωση προτάσεων, αφού το νόημά τους είναι αντιστοίχως "μεγαλύτερος από οποιοδήποτε πραγματικό" και "μικρότερος από οποιοδήποτε πραγματικό". Η στενή σχέση των κατεκδοχ ήν αριθμών με τους πραγματικούς φανερώνεται και από το γεγονός πως οι δύο αυτοί αριθμοί σχεδόν "επουλώνουν το έλλειμμα ισονομίας" μεταξύ των πραγματικών που παρουσιάζει η διαίρεση ως προς το 0, καθώς αποδεικνύεται πως ισχύουν οι σχέσεις: $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=+\infty$ όταν ο x έχει θετικές μόνο τιμές, και $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=-\infty$ όταν ο x έχει αρνητικές μόνο τιμές. Ένας άλλος συμβολικός τρόπος γραφής αυτών είναι ως $\frac{1}{0^+}=+\infty$ και $\frac{1}{0^-}=-\infty$ που ουσιαστικά δηλώνει τη δυνατότητα να διαιρούμε και με το 0

Ο κλάδος των μαθηματικών που ονομάζεται Ανάλυση δικαιολογεί την ύπαρξή του χάριν στην έννοια του ορίου. Με τη σειρά της η Ανάλυση, αποτελεί το κύριο μαθηματικό εργαλείο για την πλειοψηφία των επιστημών. Θα πρέπει να είναι λοιπόν δικαιολογημένη η ιδιαίτερη θέση που κατέχει το όριο στα μαθηματικά και στις καρδιές όσων ασχολούνται με αυτά …

Περισσότερα στο 4ο τεύχος του "φ" (σελ. 79-85)