



δημιουργικές σελίδες

ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Κυρτότητα και Εξισώσεις

Δημήτρης Μπουνάκης

Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

Εισαγωγή

Είναι γνωστό ότι με βάση την έννοια της κυρτότητας συναρτήσεων και τις ιδιότητές της μπορούν να αποδειχθούν πολλές ανισοτικές σχέσεις. Μια κατηγορία από αυτές επαληθεύονται γεωμετρικά από την παρατήρηση ότι η εφαπτομένη σ' ένα σημείο της γραφικής παράστασης μιας κυρτής (αντίστοιχα κοίλης) συνάρτησης, βρίσκεται "κάτω" (αντίστοιχα "πάνω") από την γραφική παράσταση της συνάρτησης. Μια άλλη πάλι κατηγορία προκύπτει από την παρατήρηση ότι, αν μια ευθεία τέμνει την γραφική παράσταση μιας κυρτής (αντίστοιχα κοίλης) συνάρτησης σε δυο σημεία A, B , τότε το μεταξύ των A, B τμήμα της γραφικής παράστασης βρίσκεται "κάτω" (αντίστοιχα "πάνω") από το τμήμα AB . Όμως, σε πόσα σημεία μπορεί να τέμνει μια ευθεία την γραφική παράσταση μιας κυρτής (κοίλης) συνάρτησης; Η γεωμετρική εποπτεία μας λέει άμεσα, το πολύ σε δυο. Πράγματι, αυτό θα το αποδείξουμε αναλυτικά (με μεθόδους της ανάλυσης) και στηριζόμενοι σ' αυτό και σ' ένα σχετικό λήμμα, θα δούμε μερικές εφαρμογές σχετικές με την αντιμετώπιση ορισμένου τύπου (κυκλικών) εξισώσεων. Θεωρούμε γνωστό τον ορισμό της κυρτότητας μιας συνάρτησης όπως δίνεται στο σχολικό βιβλίο της γ' Λυκείου.

Θεώρημα

Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή (αντίστοιχα κοίλη) σ' ένα διάστημα Δ , τότε κάθε ευθεία του επιπέδου έχει το πολύ δυο κοινά σημεία με την γραφική παράσταση της f .

Απόδειξη

α) Αρκεί να δείξουμε ότι δεν υπάρχει ευθεία η οποία να τέμνει την γραφική παράσταση της f σε τρία (διαφορετικά) σημεία. Έστω (ε) μια τυχούσα ευθεία. Αν η ευθεία αυτή είναι παράλληλη στον άξονα των y , τότε έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με την γραφική παράσταση της f .