

Προτεινόμενα Επαναληπτικά

Θέματα

θέματα

ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Γ. Κομπότης

Θέμα 1ο

Μία συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta < \gamma < \delta$.

Να αποδείξετε ότι:

- i) Αν $f(\alpha) + f(\beta) = f(\gamma) + f(\delta)$ τότε υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $f'(x_0) = 0$
- ii) Αν $f(\alpha) + f(\delta) = f(\beta) + f(\gamma)$ με $\alpha + \delta = \beta + \gamma$ τότε υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ με $f''(\xi) = 0$
- iii) Αν $f(\beta) < f(\alpha) < f(\delta) < f(\gamma)$ τότε υπάρχει $\rho \in \mathbb{R}$ με $f''(\rho) = 0$
- iv) Αν $f(\alpha) = f(\beta) = f(\gamma)$ τότε υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f''(x_0) + x^{2005} \cdot f'(x) = 0$
- v) Αν $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx < (\beta - \alpha) \cdot f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$
- vi) Αν $f(\alpha + \beta - x) = f(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} x \cdot f(x) dx = \frac{\alpha + \beta}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$

Θέμα 2ο

Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ενώ η C_f διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$. Θεωρούμε τις ευθείες $\varepsilon_1: f(t)x - y + 2 = 0$ και $\varepsilon_2: 2x - f'(t)y + 1 = 0$ με $t \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$.

- i) Να βρείτε τον τύπο της f
- ii) Να αποδείξετε ότι $f(e^{-2x}) \leq f(1 - 2x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- iii) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα και κυρτή στο \mathbb{R} .
- iv) Να αποδείξετε ότι η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη τον άξονα $x'x$
- v) Να αποδείξετε ότι ορίζεται η f^{-1} και να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από την $C_{f^{-1}}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \frac{1}{e}$ και $x = 1$

Περισσότερα στο 4ο τεύχος του “Φ”
(σελ. 93-94)