δημιουργικές σελίδες ΑΛΓΕΒΡΑΣ

Ακρότατα και Φράγματα στα Μέτρα Μιγαδικών

Λεωνίδας Θαρραλίδης

1. Εισαγωγή

1. Στο 3ο θέμα των μαθηματικών θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης του 2006, δίνονταν τρεις μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ και $z_1+z_2+z_3=0$ και, μεταξύ άλλων, ζητούνταν να αποδειχθούν οι ανισότητες: $|z_1-z_2|^2\le 4$ και $\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2)\ge -1$.

Ωστόσο, με τα δεδομένα του προβλήματος, μπορούσε να αποδειχθεί ότι $|z_1-z_2|^2=3$ ενώ $\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2)=-\dfrac{1}{2}$. (Δες σχετικά και στο τέλος του άρθρου).

Αυτό, φυσικά, δεν αναδεικνύει λανθασμένο το θέμα, αλλά εγείρ ει το ερώτημα κατά πόσο είναι νόμιμο από τη μεριά της «μαθηματικής ηθικής» να ζητούμε από μαθητές να αποδείξουν την **ύπαρξη φράγματος σε μία σταθερή ποσότητα**: τον αριθμό 4 ως **άνω φράγμα** του $|z_1-z_2|^2$ και τον αριθμό -1 ως **κάτω φράγμα** του $\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2)$.

2. Όταν είδα το θέμα, θυμήθηκα μία άσκηση (από τις «Γενικές» μάλιστα) του χαριτωμένου και αλησμόνητου βιβλίου μαθηματικών τεχνολογικής κατεύθυνσης Γ Λυκείου (Α' Έκδοση 1999). Στην άσκηση 5 της σελίδας 125 δίνονταν οι μιγαδικοί z_1=3-i και z_2= 1+2i και ζητούνταν η **μέγιστη και ελάχιστη τιμή της παράστασης** $|z_1+z_2|$, δηλαδή η μεγαλύτερη και μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει ο αριθμός : $|(3-i)+(1+2i)|=|4+i|=\sqrt{17}$!!!

Πόσο μεγάλο μπορεί άραγε να γίνει το $\sqrt{17}$; Ας ευχηθούμε ότι το τετράγωνό του θα περάσει στο πανεπιστήμιο με τέτοιες «Γενικές Ασκήσεις»!

(Παρεπιμπτόντως, στο υπέροχο αυτό βιβλίο, σε μερικές ασκήσεις –σε μερικές άλλες, πάλι, όχι! - όταν λέγαμε «μιγαδικός» εννοούσαμε «μη πραγματικός μιγαδικός». Ωραία έκπληξη!)

2. Φράγμα – Ακρότατο

3. Έστω Α μία παράσταση που περιέχει μεταβλητές (τουλάχιστον μία) και η αριθμητική της τιμή μεταβάλλεται. Ά ν ω φ ρ ά γ μ α της Α λέγεται κάθε αριθμός α για τον οποίο ισχύει $A \le a$, για οποιαδήποτε τιμή των μεταβλητών της παράστασης Α. Είναι φανερό ότι, τότε, και κάθε αριθμός β με β>α , είναι επίσης ένα άνω φράγμα της Α.
Για παράδειγμα, αν $A = 3\eta\mu x + 4\sigma\upsilon\nu x$, τότε το 7 είναι ένα άνω φράγμα της Α, αφού: $3\eta\mu x + 4\sigma\upsilon\nu x \le 3\cdot 1 + 4\cdot 1 = 7$. Αλλά φυσικά ισχύουν και $A \le 10, A \le 500$ κλπ.
Ανάλογα: κ ά τ ω φ ρ ά γ μ α της Α, είναι κάθε αριθμός κ, με $A \ge \kappa$. Αλλά και οποιοσδήποτε αριθμός λ με λ<κ , είναι επίσης κάτω φράγμα της Α.

4. Α κ ρ ό τ α τ α της Α είναι το μ έ γ ι σ τ ο και το ε λ ά χ ι σ τ ο της Α:.
Μ έ γ ι σ τ η Τ ι μ ή της Α είναι ο αριθμός Μ, όταν είναι ο μεγαλύτερος από τις δυνατές τιμές που παίρνει η παράσταση Α.
Ε λ ά χ ι σ τ η Τ ι μ ή της Α είναι ο αριθμός m, που είναι η ελάχιστη από τις τιμές που μπορεί να λάβει η παράσταση.

5. Έτσι, για την $A = 3\eta\mu x + 4\sigma\upsilon\nu x$, η οποία μετασχηματίζεται (Άλγεβρα Β Λυκείου, σελίδα 46) στη μορφή $A = 5\eta\mu(x+\phi)$, όπου $\eta\mu\phi = \frac{4}{5}, \sigma\upsilon\nu\phi = \frac{3}{5}$, η μέγιστη τιμή είναι Μ=5 ενώ η ελάχιστη m= -5. Μπορούμε να δώσουμε και μία διαφορετική απόδειξη, μέσω διανυσμάτων:
Αν θέσουμε $\vec{\alpha} = (3,4)$ και $\vec{\beta} = (\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x)$ τότε είναι $|\vec{\alpha}| = 5, |\vec{\beta}| = 1$ και $\mathrm{A} = \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$. Όμως ισχύει $-|\vec{\alpha}||\vec{\beta}| \le \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} \le |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$ δηλαδή $-5 \le \mathrm{A} \le 5$, με τις ακραίες τιμές να είναι πραγματοποιήσιμες όταν $\vec{\alpha} \,//\, \vec{\beta}$.

6. Δεν υποχρεούται κάθε παράσταση να εμφανίζει φράγματα ή ακρότατα. Για παράδειγμα η $A = x + \frac{1}{x}, x \ne 0$ δεν έχει ούτε φράγματα ούτε ακρότατα. Η $B = x + \frac{1}{x}, x > 1$ έχει κάτω φράγμα κάθε αριθμό κ με $\kappa \le 2$ αλλά δεν έχει ακρότατο. Τέλος, η παράσταση $\Gamma = x + \frac{1}{x}, x \ge 1$ έχει κάτω φράγμα κάθε αριθμό κ με $\kappa \le 2$ και ελάχιστη τιμή το 2. (Είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι $x + \frac{1}{x} \ge 2, \forall x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει για x=1). Πάντως, όταν μία παράσταση έχει ελάχιστη τιμή, αυτή είναι το μέγιστο κάτω φράγμα της.

7. Οι διαφορές μεταξύ άνω φράγματος και μέγιστης τιμής (όταν υπάρχουν) είναι:

1. Η μέγιστη τιμή είναι μοναδική ενώ τα άνω φράγματα άπειρα σε πλήθος. Δεν θα ήταν παράλογο να ζητηθεί στο 3^o θέμα του 2006 ότι π.χ. $|z_1 - z_2|^2 \leq 2006$!!

2. Η μέγιστη τιμή είναι αριθμός που λαμβάνει η παράσταση για προσδιορίσιμες τιμές των μεταβλητών που περιέχει.

Ανάλογης ποιότητας διαφορές μπορούμε να εντοπίσουμε και μεταξύ των ακόλουθων μαθηματικών εννοιών:

1. Μεταξύ συνόλου αφίξεως Β συνάρτησης $f: A \to B$ και συνόλου τιμών f(A): Το Β είναι υπερσύνολο του f(A), περιέχει όλες τις τιμές f(x) των στοιχείων x του Α, αλλά ενδεχομένως και αριθμούς που δεν είναι τιμές της συνάρτησης. Για παράδειγμα, αν $f: \mathbb{R} \to [-1,10]$ με $f(x) = \eta\mu x$ τότε Β=[-1,10] ενώ προφανώς f(A)=[-1,1].

2. Μεταξύ της περιβάλλουσας γραμμής και του γεωμετρικού τόπου μεταβλητού σημείου Μ. Η περιβάλλουσα είναι «η γραμμή στην οποία κινείται το Μ», άσχετα με το αν τελικά το Μ δεν μπορεί να βρεθεί σε όλες τις θέσεις της. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε μεταβλητό σημείο Μ(ημθ, συνθ) με $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ τότε $x_M{}^2 + y_M{}^2 = 1$, άρα το Μ κινείται στο μοναδιαίο κύκλο (Ο,1). Αφού όμως $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, συμπεραίνουμε ότι $x_M, y_M \geq 0$. Έτσι ο γεωμετρικός τόπος του Μ είναι το τεταρτοκύκλιο του παραπάνω κύκλου που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο.

Ο προσδιορισμός Ακροτάτων Παράστασης, Συνόλου Τιμών, Γεωμετρικού Τόπου είναι σαφώς δυσχερέστερος από τον υπολογισμό φραγμάτων ή περιβάλλουσας, εφ όσον απαιτεί έλεγχο των αποτελεσμάτων ως προς τη δυνατότητα πραγματοποίησής τους.

3. Ασκήσεις με Ακρότατα Μέτρου Μιγαδικών

Στη συνέχεια θα δούμε μερικές ασκήσεις, στις οποίες ο βιαστικός εντοπισμός «ακροτάτων» αποδεικνύεται παραπλανητικός. Σε κάθε περίπτωση ακολουθεί η αποκατάσταση της αλήθειας.

Άσκηση 1

Δίνονται οι μιγαδικοί z, w με w=z+3+4i και $\left|z+\frac{17}{2}\right|=\left|z-\frac{1}{2}-12i\right|$.

Α. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας K(z).

Β. Να βρείτε το ελάχιστο δυνατό μέτρο του w.

ΛΥΣΗ

Α. Το K(z) βρίσκεται στη μεσοκάθετο του AB όπου A(-17/2,0) και B(1/2,12), η οποία είναι ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος. Αν θέσουμε $z=x+yi$, βρίσκουμε την εξίσωση 3x+4y=12, η οποία είναι της μεσοκαθέτου (ε) του AB.

Β. Με $z=x+yi$, είναι $w=(x+3)+(y+4)i$. Έτσι :

$|w|=\sqrt{(x+3)^2+(y+4)^2}=\sqrt{x^2+y^2+6x+8y+25}$ και αφού $6x+8y=2(3x+4y)=24$:

$|w|=\sqrt{x^2+y^2+49}\geq\sqrt{49}=7$ δηλαδή $|w|\geq 7$. Έτσι $|w|_{\min}=7$.

ΣΧΟΛΙΟ : Σύμφωνα με τον τρόπο λύσης στο (Β), το ελάχιστο μέτρο του w επιτυγχάνεται όταν $x^2+y^2=0 \Leftrightarrow x=y=0$. Όμως η εικόνα του αριθμού 0 δεν βρίσκεται στην 3x+4y = 12!! Διαφορετικά: Ο μιγαδικός z=0+0i δεν έχει την ιδιότητα $\left|z+\frac{17}{2}\right|=\left|z-\frac{1}{2}-12i\right|$. Κατά συνέπεια, το 7 δεν είναι η ελάχιστη τιμή του μέτρου του w, αλλά ένα κάτω φράγμα. Το λάθος διορθώνεται ως εξής: Είναι $|w|=(KA)$, όπου K(z) , A(-3,-4). Έτσι, έχουμε:

$|z|_{\min}=d(A,\varepsilon)=\frac{|3(-3)+4(-4)-12|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{37}{5}>7$. Με τον γεωμετρικό αυτόν τρόπο, είναι δυνατό να προσδιορισθεί και ο μιγαδικός w με το ελάχ ιστο δυνατό μέτρο.

Άσκηση 2

Α. Να λύσετε την εξίσωση: $z^2-6\sigma\upsilon\nu\theta\cdot z+5\sigma\upsilon\nu^2\theta+4=0$, όπου $\theta\in\mathbb{R}$.

Β. Να βρείτε τη γραμμή στην οποία κινούνται οι εικόνες των ριζών z_1, z_2 της παραπάνω εξίσωσης, για τις διάφορες τιμές του θ.

Γ. Να βρείτε τη μέγιστη δυνατή τιμή του μέτρου $|z_1-z_2|$ για τις ρίζες αυτές.

ΛΥΣΗ

Α. Είναι Δ=(-6συνθ)^2-4(5συν^{2}θ+4)=16συν^{2}θ-16=-(4ημθ)^2 άρα $z_{1,2}=3\sigma\upsilon\nu\theta\pm 2\eta\mu\theta\cdot i$.

Β. Αν $M_{1,2}$ οι εικόνες των $z_{1,2}$ τότε $x_{1,2}$=3συνθ ενώ $y_{1,2}=\pm$2ημθ.

Έτσι: $\frac{x_{1,2}}{3}=$ συνθ, $\frac{y_{1,2}}{2}=\pm$ημθ οπότε τα σημεία $M_{1,2}$ βρίσκονται στην έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

Γ. Είναι $|z_1-z_2|=(M_1M_2)$ και η μέγιστη τιμή προκύπτει όταν το τμήμα M_1M_2 γίνει ο μεγάλος άξονας της έλλειψης. Είναι α^2=9 άρα α=3 και 2α=6. Έτσι: $|z_1-z_2|_{\max}=6$.

Περισσότερα στο 4ο τεύχος του “φ” (σελ. 95-106)