Το πρόβλημα
του κρυμμένου θυσαυρού

Παναγιώτης Νικ. Πινάτσης

1. Εισαγωγή

Αρχίζοντας, κρίνεται απαραίτητο γι' αυτά που θα διαπραγματευτούμε παρακάτω να σταθούμε για λίγο:

I) στον όρο "ανοικτά προβλήματα" και να πούμε ότι σε τέτοιου τύπου προβλήματα δεν υπάρχουν εμφανή "πατήματα" που θα μπορούσαν να οδηγήσουν εύκολα στη λύση.

Στην κοινότητα των ερευνητών μαθηματικών ανοικτό πρόβλημα σημαίνει πρόβλημα το οποίο δεν έχει ακόμη επιλυθεί, δηλ. είναι ανοικτό, γιατί ακόμη δεν έχει "κλείσει" π.χ. η εικασία του Goldbach. Το μέχρι πρότινος ανοικτό πρόβλημα του θεωρήματος του Fermat έκλεισε για τη μαθηματική κοινότητα μετά την απόδειξη του Willes.

Στο σχολικό περιβάλλον ένα πρόβλημα μπορεί να θεωρείται κλειστό για μερικούς μαθητές ενώ ανοικτό για άλλους, ανάλογα με την σχολική τάξη π.χ. η λύση των δευτεροβάθμιων εξισώσεων είναι ανοικτό πρόβλημα για τους μαθητές των πρώτων τάξεων του Γυμνασίου, όμως δεν συμβαίνει το ίδιο για τους μαθητές της Γ' γυμνασίου. Συνήθως, δίνουμε στον όρο ανοικτό πρόβλημα μια από τις παρακάτω σημασίες:

Α. Ανοικτό ως προς την ερμηνεία της διατύπωσής του.
π.χ. Γεμίστε αποτελεσματικότερα μια αποθήκη με αντικείμενα ίδιου σχήματος;

Β. Ανοικτό ως προς τον τρόπο προσέγγισής του.
π.χ. Δοθέντος ενός κύκλου να βρεθεί το κέντρο του.

Γ. Ανοικτό ως προς το πλήθος των λύσεών του.
π.χ. Σχεδιάστε ένα τετράπλευρο με περίμετρο 20 cm.

II) στον όρο "δημιουργική αμφιβολία", που αποτελεί εγγενή ικανότητα του ερευνητή μαθηματικού και να πούμε ότι επιμέρους αποτέλεσμα κοντά στη λύση του προβλήματος τον οδηγεί σε πιεστικά ερωτήματα που έχουν να κάνουν:

i) Στο από εδώ και πέρα, τι γίνεται; Τελειώσαμε;

ii) Στην ορθότητα των προηγουμένων, όχι όσον αφορά την ορθότητα των πράξεων ή τον δρόμο που ακολουθήσαμε, αλλά ως προς την ισχύ αυτού στο οποίο φτάσαμε.

Έτσι, η δημιουργική αμφιβολία είναι μια αμφιβολία που οδηγεί στην παραγωγή νέων ερωτημάτων και προβλημάτων και διακρίνεται σε:

α. Μεθοδολογική (έλεγχος εμβέλειας μεθόδου) Π.χ. ισχύς αντίστροφης πρότασης

β. Επί του πρακτέου (αφορά τη διατύπωση του προβλήματος). Π.χ. δυνατότητα εύρεσης του ζητούμενου

γ. Διατύπωσης (γενίκευση του προβλήματος). Π.χ. δυνατότητα ελεύθερης κίνησης έξω απ' το υπάρχον πλαίσιο.

Υπάρχει εμφανής διάκριση μεταξύ της νοητικής δραστηριότητας του ερευνητή μαθηματικού όταν σκέφτεται στο αντικείμενό του και του τελικού αποπροσωποποιημένου προϊόντος που καταγράφεται ως "επίσημα μαθηματικά". Το κυριότερο ίσως χαρακτηριστικό του μαθηματικού όταν σκέφτεται και παράγει μαθηματικά είναι, σε κάθε βήμα που κάνει, η δημιουργική του αμφιβολία. Αυτή η ιδιαίτερου τύπου αμφιβολία που του δίνει τροφή για να θέτει ερωτήματα, να διατυπώνει εικασίες, να μορφώνει νέα προβλήματα ακόμη και πριν να φτάσει στη λύση του αρχικού ή και μετά απ' αυτήν. Η δημιουργική αμφιβολία του δίνει "πατήματα" που τον οδηγούν σε ποικίλες προσεγγίσεις του ανοικτού τύπου προβλήματος που έχει απέναντί του. Απ' όλο αυτό το αλισβερίσι του νου για την κατάκτηση της γνώσης τίποτε σχεδόν δεν παραμένει στο τελικό μαθηματικό προϊόν που διδάσκεται στις διάφορες εκπαιδευτικές βαθμίδες.

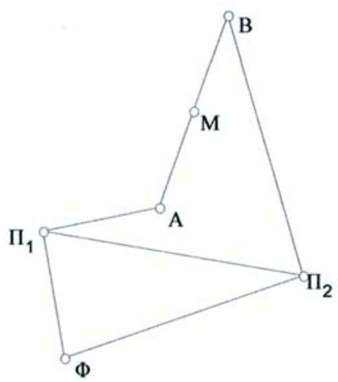
Οι μαθητές συνήθως αναμασούν αυτά που γράφει το βιβλίο ή έγραψε ο δάσκαλος στον πίνακα και οι ασκήσεις που τους δίνονται συνήθως απαιτούν εφαρμογή γνωστών κανόνων και τύπων, ενώ την μαθηματική αλήθεια την κατέχει μόνο ο δάσκαλος. Γενικά αυτό που ενδιαφέρει είναι η δυνατότητα να βρίσκεις σωστές απαντήσεις. Όλοι θεωρούν ότι τα προβλήματα είναι απλά εκεί και θέλουν λύση, πολύ σπάνια αναρωτιούνται αν υπάρχει η δυνατότητα να τα διατυπώσουμε διαφορετικά, πόσο μάλλον από που ήρθαν. Όμως στην καθημερινή ζωή, έξω από το σχολείο, τα πιο πολλά προβλήματα τα θέτουν, τα ανακαλύπτουν, τα διαμορφώνουν και τα λύνουν οι ίδιοι οι άνθρωποι που δέχονται την επίδρασή τους και επιζητούν τη λύση τους. Η υπέρβαση αυτών των προβληματισμών βρίσκεται στην ενθάρρυνση των μαθητών, ώστε να εργαστούν, με τη βοήθεια του δασκάλου, με παρόμοιο τρόπο με τον ερευνητή - μαθηματικό περνώντας μέσα απ' τα ίδια νοητικά στάδια που πέρασε και αυτός. Η σημασία της ενεργοποίησης των μαθητών στη διαδικασία αυτή κατά τη διάρκεια του μαθήματος δίνει αξία σ' αυτό που λέμε "διδάσκω μαθηματικά" και κάνει τους μαθητές να αντιληφθούν τι σημαίνει "μαθαίνω μαθηματικά".

2. Στόχοι

Θα προσπαθήσουμε:

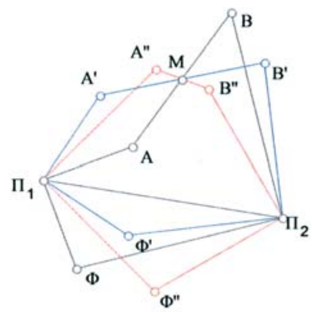
i) μέσα από το ανοικτό πρόβλημα του "κρυμμένου θησαυρού" να προσομοιώσουμε τη δουλειά του ερευνητή μαθηματικού έτσι ώστε να γίνει βρώσιμη πνευματική τροφή στο περιβάλλον της σχολικής τάξης.

ii) να αναφερθούμε σε κάποια πρακτικά θέματα που καλούνται να αντιμετωπίσουν ο δάσκαλος και οι μαθητές του σε περίπτωση πραγματοποίησης της διαδικασίας αυτής στην τάξη.



3. Το πρόβλημα

Οι πειρατές του Μπαρμπαρόσσα μετά από κάθε πειρατεία έκρυβαν τον κλεμμένο θησαυρό στην ίδια πάντα τοποθεσία όπου υπήρχαν δύο πηγάδια $Π_1$,$Π_2$ και ένας φοίνικας Φ. Για να θυμούνται τη θέση του θησαυρού, κρατούσαν κάθε φορά, μετά από μια πειρατεία, κάποιες πρόχειρες σημειώσεις. Μετά από χρόνια, ένας εγγονός του Μπαρμπαρόσσα βρήκε κάποιες σημειώσεις για κρυμμένους θησαυρούς. Μία απ' αυτές έλεγε ότι οι πειρατές χάραξαν ευθεία $Π_1Α$ κάθετο στην $Π_1Φ$, ώστε $Π_1Α= Π_1Φ$, και ευθεία $Π_2Β$ κάθετο στην $Π_2Φ$, ώστε $Π_2Β=Π_2Φ$. Στο μέσον Μ της ΑΒ έκρυψαν το μισό θησαυρό και τον άλλο μισό, όπως συνήθιζαν πάντα, τον έκρυψαν στη ρίζα του φοίνικα. Αλλά, όταν ο εγγονός πήγε εκεί, ο φοίνικας δεν υπήρχε πλέον και λόγω εχθρικού περιβάλλοντος είχε τη δυνατότητα ελάχιστων δοκιμών. Τι θα τον συμβουλεύατε να κάνει, για να βρει το θησαυρό;

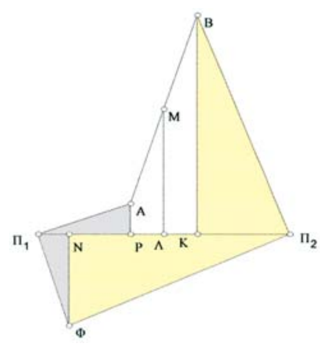


3.1 Το γενικό πλαίσιο

Για να γίνει η διαπραγμάτευση του προβλήματος στην τάξη, ζητείται από τους μαθητές να φτιάξει ο καθένας το δικό του χάρτη του θησαυρού και ο διδάσκων παίρνει έναν απ' αυτούς τους χάρτες, θεωρώντας ότι αυτός είναι εκείνος που σχεδίασε ο εγγονός του Μπαρμπαρόσσα. Ταυτόχρονα ζητά από τους μαθητές που έχουν διαφορετικό χάρτη από τον προτεινόμενο να διαπραγματεύονται ανάλογα το πρόβλημα.

3.2 Μέθοδος προσέγγισης: Κατασκευαστική

Δοκιμάζουμε για διάφορες πιθανές θέσεις του φοίνικα ποιες οι αντίστοιχες θέσεις του σημείου Μ του "θησαυρού" και προσπαθούμε με βάση αυτές να εικάσουμε (αν είναι δυνατόν) την περιοχή που θα ανήκει το σημείο Μ. Παρατηρούμε κατασκευαστικά ότι, για διάφορες θέσεις του φοίνικα, το σημείο Μ του "θησαυρού" παραμένει περίπου σταθερό.



3.3 Εικασία

Το σημείο Μ του "θησαυρού" παραμένει σταθερό για οποιαδήποτε θέση του φοίνικα (άρα δεν εξαρτάται απ' τη θέση του),

Περισσότερα στο 4ο τεύχος του "φ"
(σελ. 113-120)