ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΙ

Σκέψεις - Ερωτήματα - Απαντήσεις - Προτάσεις και Πολύ Διδακτικό Υλικό ...

Λύσεις στα Προτεινόμενα Θέματα Προετοιμασίας Μαθηματικών Διαγωνισμών .... μικρών....

Παναγιώτης Καντιώτος

Φοιτητής Σχ. Πολ. Μηχανικών του Ε.Μ.Π.

1 Ανά 6 όρους έχουμε άθροισμα – 18.

Άρα έχοντας 50 εξάδες $(50\cdot 6=300 \text{ όροι})$ έχουμε σύνολο $50\cdot(-18)=-900$

2 Το Β μπορούμε να το υπολογίζουμε προσθέτοντας τα πολλαπλάσια του 3 και του 4, αφαιρώντας τα πολλαπλάσια του 12.

$$B=S_3+S_4-S_{12}$$

$$\left.\begin{aligned} S_3&=\frac{668}{2}(3+2004)=670.338\\ S_4&=\frac{501}{2}(4+2004)=503.004\\ S_{12}&=\frac{167}{2}(12+2004)=168.336 \end{aligned}\right\} B=S_3+S_4-S_{12}=1.005.006$$

3 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, ..., 1

Έχουμε 401 πεντάδες (1, 2, 3, 4, 5) και 1.

Άρα $401\cdot 15+1=6016$

4 $1\cdot 3\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdot 21\cdot \ldots \cdot 2001\cdot 2003$

Το γινόμενο των αριθμών που ανήκουν στην ίδια δεκάδα τελειώνει σε 9. Καθώς έχουμε άρτιο αριθμό δεκάδων από το 1 μέχρι το 1999 το γινόμενο όλων αυτών μέχρι το 1999 θα λήγει σε 1. Άρα πολλαπλασιάζοντας με 2001 και 2003 θα λήγει σε 3.

5 Όλοι διαιρούνται με το 2, αρκεί λοιπόν να διαιρούνται και με το 3.

Με το γνωστό κριτήριο διαιρετότητας του 3 συμπεραίνουμε ότι σε κάθε 3 όρους βρίσκουμε έναν που να διαιρείται με το 3. (888, 888888, ...)

Οι αριθμοί αυτοί είναι λοιπόν 668. (είναι αυτοί που αποτελούνται από 3κ οχτάρια)

6 $$\frac{(1990)^3-1000^3-990^3}{1990\cdot 1000\cdot 990}=\frac{3(1000)(990)(1000+990)}{1990\cdot 1000\cdot 990}=3$$

αφού $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)\Leftrightarrow(\alpha+\beta)^3-\alpha^3-\beta^3=3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

7 $2(16^{12})+2(8^{16})=2(2^4)^{12}+2(2^3)^{16}=2\cdot 2^{48}+2\cdot 2^{48}=4\cdot 2^{48}=2^{50}\Leftrightarrow x=50$

8 Ελλειπής εκφώνηση

9 c = 13

10 14, 22, 27

11 a = 44, b = 55, c = 100, d = 45, e = 56, f = 16

12 y = 3x – 1 (προσπαθήστε να βρείτε και άλλες)

13 Για a = b ισχύει. Έστω τώρα ότι $a\neq b$ τότε έχω:

$$a^3-a^2=b^3-b^2\Leftrightarrow a^3-b^3=a^2-b^2\Leftrightarrow \cancel{(a-b)}\left(a^2+b^2+ab\right)=(a+b)\cancel{(a-b)}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow(a+b)^2+1=(a+1)(b+1)$ που ισχύει, άρα ισχύει και η ζητούμενη (αρχική) ισότητα.

14
$$\begin{array}{l}
\alpha^2+2\beta+1=8\\
\beta^2+4\gamma+4=-3\\
\underline{\gamma^2+6\alpha+9=-5}\\
(\alpha+3)^2+(\beta+1)^2+(\gamma+2)^2=0\Leftrightarrow\alpha=-3\qquad\beta=-1\quad\gamma=-2
\end{array}$$

15 $\alpha=\beta=\frac{19}{52}\cdot\frac{101}{101}=\gamma=\frac{19}{52}\cdot\frac{10101}{10101}$ (είναι δηλαδή όλοι ίσοι μεταξύ τους)

Περισσότερες λύσεις (78 συνολικά προβλήματα του 3ου τεύχους) δείτε στο 4ο τεύχος του "φ" (σελ. 199-219)