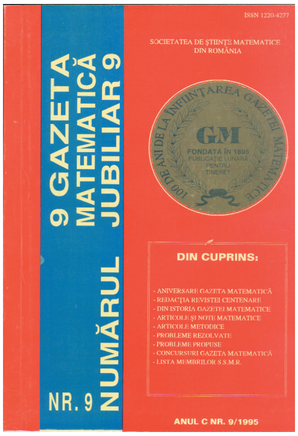

Θέματα Ρουμάνικων Μαθηματικών Διαγωνισμών

Μετάφραση - Παρουσιάση: ΄Ελενα & Νικολάϊ - Τουντόρ Νιμάρα

ΕΘΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ 2007-09-05

Πόλη Πιτέστι

Τάξη VII (Τρίτη Γυμνασίου)

Θέμα 1ο

Σε ένα τρίγωνο ABC, με πλευρές a, b, c,

ισχύουν οι σχέσεις: $a + b - c = 2$ και,

$$2ab - c^2 = 4$$

να αποδείξετε πως αυτό το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

Θέμα 2ο

΄Εστω το ορθογώνιο τρίγωνο ABC με $\widehat{A} = 90^\circ$ και $AC = 2AB$. ΄Εστω P και Q τα μέσα των πλευρών AB και AC και τα σημεία M, N στην πλευρά BC με $CM = BN = x$.

Να βρεθεί το x συναρτήσει του AB ώστε να ισχύει:

$$\left[2\cdot S[MNPQ]\right] = S[ABC] \text{ (όπου S σημαίνει εμβαδό)}$$

Θέμα 3ο

΄Εστω το ορθογώνιο τρίγωνο ABC, με $\widehat{A} = 90^\circ$ και $AB < AC$. ΄Εστω D πάνω στην πλευρά AC έτσι ώστε $A\widehat{C}B = D\widehat{B}A$. Το σημείο E είναι η προβολή του σημείου D πάνω στην BC. Ξέροντας πως $BD + DE = AC$ να βρείτε πόσες μοίρες είναι η κάθε γωνία του τριγώνου ABC.

Θέμα 4ο

΄Εστω m, n φυσικοί αριθμοί με $m > 1$ και $2^{2m+1} - n^2 > 0$.

Να αποδειχτεί ότι $2^{2m+1} - n^2 \geq 7$.

Τάξη (VIII) (Τετάρτη Γυμνασίου)

Θέμα 1ο

Να αποδείξετε πως ο αριθμός 10^{10} δεν μπορεί να γραφτεί ως γινόμενο δύο φυσικών αριθμών, οι οποίοι γραφόμενοι σε δεκαδική μορφή, να μην περιλαμβάνουν το ψηφίο μηδέν (0).

Θέμα 2ο

Σε ένα κτίριο υπάρχουν 6018 γραφεία μοιρασμένα σε 2007 δωμάτια και σε κάθε δωμάτιο υπάρχει τουλάχιστον ένα γραφείο. Μπορούμε να αδειάζουμε οποιοδήποτε δωμάτιο, μοιράζοντας τα γραφεία του στα υπόλοιπα δωμάτια έτσι ώστε σ' αυτά τα δωμάτια να υπάρχει ο ίδιος αριθμός γραφείων. Να βρεθεί με πόσους τρόπους μπορούν να μοιραστούν αρχικά τα γραφεία σ' αυτό το κτίριο.

Θέμα 3ο

α) Σε ένα τρίγωνο MNP, τα μήκη των πλευρών του είναι μικρότερα από το 2. Να αποδείξετε πως το μήκος του ύψους που αντιστοιχεί στην πλευρά MN είναι μικρότερο από $\sqrt{4-\dfrac{MN^2}{4}}$.

β) Σε ένα τετράεδρο ABCD, τουλάχιστον 5 άκρα έχουν τα μήκη τους μικρότερα από το 2. Να αποδείξετε πως ο όγκος του τετραέδρου είναι μικρότερος του 1.

Θέμα 4ο

Έστω ABCD ένα τετράεδρο.

Να αποδείξετε ότι αν για ένα τυχαίο σημείο M ισχύουν τα ακόλουθα:

$MA^2 + MB^2 + CD^2 = MB^2 + MC^2 + DA^2 = MC^2 + MD^2 + AB^2 = MD^2 + MA^2 + BC^2$,

τότε αυτό το σημείο ανήκει στην κοινή κάθετη των δύο πλευρών AC και BD.