Η Αρχή του Περιστερώνα (Pigeonhole Principle) στα Σεμινάρια Μαθηματικών

Περικλής Παυλάκος

Πρόλογος

Στο 3ο τεύχος του ανά χείρας περιοδικού, υπήρχε μια μικρή ιστορική αναδρομή κάποιων εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων, που ονομάστηκαν "Μαθηματικές Καταστάσεις". Ένας από τους κύριους άξονές τους είναι τα Σεμινάρια Μαθηματικών.

Τα Σεμινάρια Μαθηματικών είναι απογευματινές συναντήσεις, (κυρίως Σάββατα) με μαθητές και μαθήτριες του Λυκείου μας, με σκοπό την γνωριμία τους με τομείς των Μαθηματικών που δεν αναπτύσσονται (ή αγνοούνται) στην σχολική ύλη, αλλά κατά την γνώμη μου, περιέχουν βαθιές Μαθηματικές ιδέες και βοηθούν στην θεμελίωση και ανάπτυξη της Μαθηματικής σκέψης και κατανόησης. Γίνονται δέκα με δώδεκα τέτοιες συναντήσεις κατά την διάρκεια της σχολικής χρονιάς, συνήθως χωρισμένες σε δύο μέρη με διαφορετική θεματολογία.

Την χρονιά 2006-2007 το πρώτο μέρος αφιερώθηκε στην **Αρχή του Περιστερώνα**. Αφιερώσαμε πέντε συναντήσεις (παρόλο που πολύ υλικό έμεινε αχρησιμοποίητο, αφού τα προβλήματα που συνδέονται με την αρχή αυτή είναι πάμπολλα).

Στο άρθρο αυτό παρουσιάζεται ο Μαθηματικός κορμός των συναντήσεων αυτών. Ο πυρήνας των προβλημάτων που μελετήθηκαν, κατάγεται από την περίοδο 1998-2002, την εποχή που ξεκίνησε η ενασχόλησή μου με τους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς . Στο πρώτο μάθημα έχουμε την παρουσίαση της Αρχής του Περιστερώνα, την εξοικείωση με απλά προβλήματα, και στα επόμενα τέσσερα συνεχίζουμε με μια μικρή εξερεύνηση σε διάφορες Μαθηματικές περιοχές που αυτή συναντάται.

Αρκετά προβλήματα/ασκήσεις λύθηκαν κατά την διάρκεια των συναντήσεων από μαθητές, ενώ οι λύσεις των ξεχωριστής δυσκολίας προβλημάτων

συζητήθηκαν αναλυτικά μετά την παρουσίασή τους.
Τα σχόλια, αν και περιέχουν λίγες γραμμές, είναι ίσως από τα σημαντικότερα σημεία του μαθήματος. Περιέχουν προαπαιτούμενες γνώσεις , συμβολισμούς, υπενθυμίσεις, πληροφορίες, απαντήσεις σε ερωτήσεις, ιστορικά στοιχεία, συνδέσεις περιοχών, ερωτήματα, προεκτάσεις,... Όπως στην λιθογραφία του Escher, μικρές παραμορφώσεις στα πλακίδια κάλυψης μετατρέπουν κανονικά εξάγωνα σε πουλιά, έτσι και τα σχόλια μετατρέπουν την απλή Αρχή του Περιστερώνα σε ισχυρό εργαλείο επίλυσης δύσκολων και ξεχωριστών προβλημάτων αλλά και απόδειξης Θεωρημάτων.
Επίσης υπάρχουν υποδείξεις για την λύση επιλεγμένων προβλημάτων, προτεινόμενες ασκήσεις και δύο Θεωρήματα, στις αποδείξεις των οποίων χρησιμοποιείται η Αρχή του Περιστερώνα.
Τα προβλήματα με κουκίδα, στο τέλος κάθε μαθήματος είναι ασκήσεις προς λύση.
Πάντως, για να γίνει φανερό (υπό μορφή βιώματος) το μεγαλείο της Αρχής αλλά και το βάθος των προβλημάτων, προτείνω στον αναγνώστη ή την αναγνώστρια, να επιχειρήσει την επίλυση των προβλημάτων που τον/την ελκύει, πριν διαβάσει την υπόδειξη ή την λύση.
Καλή δημιουργική ανάγνωση!

Μάθημα 1ο

Μία απλή συνδυαστική αρχή (υπαρξιακή και όχι ευρετική) η οποία χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον Dirichlet (1805-1859) στην Θεωρία Αριθμών λέει το εξής:

"*Αν οι φωλιές μας είναι λιγότερες από τα περιστέρια μας και θέλουμε να τα τοποθετήσουμε σε αυτές, τότε τουλάχιστον μία τους θα περιέχει τουλάχιστον δύο περιστέρια*"

Η αρχή αυτή συναντάται στην βιβλιογραφία και ως "***Αρχή του Dirichlet***" ή "***Αρχή των Θυρίδων***" ***(Box Principle).***
Είναι εντυπωσιακός ο αριθμός των προβλημάτων (και επίσης ο βαθμός δυσκολίας μερικών από αυτά) στα οποία η διαισθητική αυτή αρχή δίνει λύση. Δίνει απόδειξη σε βαθιά Θεωρήματα. Είναι επίσης μια τεχνική που συναντάται αρκετά συχνά, ως αναγκαία, για την επίλυση προβλημάτων σε Μαθηματικούς Διαγωνισμούς (Διεθνείς ή όχι).
Ας αναφέρουμε δύο μορφές της αρχής αυτής.

Αν θέλουμε να τοποθετήσουμε $\nu+1$ αντικείμενα σε ν κουτιά τότε υποχρεωτικά τουλάχιστον δύο από αυτά θα τοποθετηθούν στο ίδιο κουτί.

Αν θέλουμε να τοποθετήσουμε $\kappa \cdot \nu+1$ αντικείμενα σε ν κουτιά τότε υποχρεωτικά σε ένα τουλάχιστον κουτί θα τοποθετηθούν $\kappa+1$ από αυτά.

(Γιατί αν ονομάσουμε $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3,\ldots,\lambda_\nu$ το πλήθος των αντικειμένων στο 1ο, 2ο, 3ο,...,ν-οστό κουτί αντίστοιχα και υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει κουτί με $\kappa+1$ αντικείμενα τότε θα ισχύει:
$\lambda_1 \leq \kappa,\ \lambda_2 \leq \kappa,\ \lambda_3 \leq \kappa,\ldots,\ \lambda\nu \leq \kappa$ και συνεπώς

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\ldots+\lambda_\nu \leq \kappa\cdot\nu < \kappa\cdot\nu+1.$$ Άτοπο)

Ας δούμε παρακάτω μερικά προβλήματα που σχετίζονται με αυτήν την αρχή.

1 Ανάμεσα σε δεκατρία άτομα, υπάρχουν δύο (τουλάχιστον) που γεννήθηκαν τον ίδιο μήνα. (Ερώτηση : Πόσα άτομα χρειαζόμαστε για να είμαστε σίγουροι ότι δύο τουλάχιστον από αυτά - αντίστοιχα 3 ή κ - έχουν την ίδια ημέρα γενέθλια;)

2 Ένας στόχος έχει το σχήμα ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς 2. Αν τρυπηθεί 5 φορές τότε υπάρχουν δύο τρύπες με απόσταση 1. (Ερώτηση : Αν τρυπηθεί 17 φορές τι συμπέρασμα βγάζετε;)

3 (Σχολική άσκηση) Αν α, β, γ ακέραιοι δείξτε ότι ο αριθμός $(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)$ είναι άρτιος.

4 (Andrew Vazsonyi και Marta Sved) Θεωρούμε ν ακεραίους : $\alpha_1, \alpha_2,\ldots\alpha_\nu$, όχι κατ' ανάγκη διαφορετικούς. Υπάρχει ένα υποσύνολο διαδοχικών από αυτούς, των οποίων το άθροισμα διαιρείται με ν.
(Υπόδειξη : Εξετάστε τους αριθμούς:

$$\alpha_1 ,\ \alpha_1+\alpha_2 ,\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 ,\ldots,\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 + \ldots +\alpha_\nu$$)

Μάθημα 2ο

Πρόβλημα 1ο (Ελληνικός Μαθηματικός Διαγωνισμός "ΘΑΛΗΣ")
Σε μια κατασκήνωση υπάρχουν 577 παιδιά από 9 διαφορετικές χώρες. Σε οποιαδήποτε ομάδα 9 παιδιών υπάρχουν 2 τουλάχιστον με το ίδιο ύψος. Αποδείξτε ότι υπάρχει ομάδα 5 παιδιών του ιδίου φύλλου από την ίδια χώρα με το ίδιο ύψος.

Λύση

Η ισότητα $577=2\cdot288 + 1$ μας εξασφαλίζει 289 άτομα του ιδίου φύλλου και η ισότητα $289 = 9 \cdot 32 + 1$ μας εξασφαλίζει 33 άτομα της ίδιας χώρας και του ίδιου φύλλου. Αν στα 33 αυτά άτομα δεν υπήρχαν 5 με το ίδιο ύψος, τότε το πλήθος οποιασδήποτε ομάδας ατόμων με το ίδιο ύψος δεν θα ξεπερνούσε το 4, συνεπώς εξαιτίας της σχέσης $33=4 \cdot 8 + 1$ θα είχαμε τουλάχιστον 9 άτομα διαφορετικού ύψους μεταξύ τους, πράγμα που δεν μπορεί να

Περισσότερα στο 4ο τεύχος του "φ"
(σελ. 236-348)