Χρήσιμες Επισημάνσεις (E_i)!

στις Βασικές Έννοιες των Συναρτήσεων και Εφαρμογή τους στην Πράξη

Αντώνης Κυριακόπουλος

ΑΣΚΗΣΗ 1 **Να εξετάσετε αν ο αριθμός 2 είναι τιμή της συνάρτησης:**

$$f(x)=\begin{cases} 6\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x-2, & \alpha\nu\ \ x\geq 2\\ x^2-3x+4, & \alpha\nu\ \ x<2\end{cases}$$

Λύση. Το σύνολο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $\mathbb{R}$. Λύνουμε την εξίσωση $f(x)=2$ με $x\in\mathbb{R}$.

- Με $x\geq 2$, έχουμε:
  $f(x)=2\Leftrightarrow 6\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x-2=2$
  $\Leftrightarrow 3\eta\mu 2x=4\Leftrightarrow \eta\mu 2x=\frac{4}{3}$,
  αδύνατη (γιατί $\frac{4}{3}>1$).
- Με $x<2$, έχουμε:

$$f(x)=2\Leftrightarrow x^2-3x+4=2\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow (x=1\ \text{ή}\ x=2),$$

δεκτή είναι μόνο η $x=1$ (γιατί $x<2$).

Άρα, το 2 είναι τιμή της συνάρτησης f (για $x=1$).

Ένας αριθμός $y\in\mathbb{R}$ είναι τιμή μιας συνάρτησης $f:A\to\mathbb{R}$ αν, και μόνο αν:
υπάρχει $x\in A$ με $f(x)=y$.

Ισοδύναμα αν, και μόνο αν:
η εξίσωση $f(x)=y$ έχει μία τουλάχιστον λύση $x\in A$.

Επισήμανση (E_1)

ΑΣΚΗΣΗ 2 **Να βρείτε το σύνολο ορισμού της συνάρτησης:**

$$f(x)=\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}\ .$$

Μετά, να γράψετε τον τύπο της f με ένα μόνο ριζικό και χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.

Το σύνολο ορισμού μιας συνάρτησης που ορίζεται από έναν τύπο $f(x)$ είναι, εξ ορισμού, το σύνολο:

$$A=\{x\in\mathbb{R} \mid f(x)\in\mathbb{R}\}\ (\neq\varnothing)$$

Επισήμανση (E_2)

Λύση. Με $x\in\mathbb{R}$, έχουμε:

$$f(x)\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2\geq 0 \\ x-1-2\sqrt{x-2}\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 2 \\ x-1\geq 2\sqrt{x-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 2 \\ (x-1)^2\geq 4(x-2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 2 \\ x^2-6x+9\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 2 \\ (x-3)^2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\geq 2.$$

Άρα, το σύνολο ορισμού της f είναι: $A=[2.+\infty)$.

– Έχουμε, για κάθε $x\in A$:

$$f(x)=\sqrt{x-2+1-2\sqrt{x-2}}=\sqrt{\left(\sqrt{x-2}-1\right)^2}=\left|\sqrt{x-2}-1\right|.$$

Εξάλλου, με $x\in A$, έχουμε:

$$\sqrt{x-2}\geq 1\Leftrightarrow x-2\geq 1\Leftrightarrow x\geq 3.$$

Όμοια: $\sqrt{x-2}<1\Leftrightarrow x<3$. Έτσι, έχουμε:

$$f(x)=\begin{cases} -\sqrt{x-2}+1, & \text{αν } 2\leq x<3 \\ \sqrt{x-2}-1, & \text{αν } x\geq 3 \end{cases}$$

Σημείωση. Δοθέντος ενός τύπου $f(x)$ το σύνολο $A=\{x\in\mathbb{R} \mid f(x)\in\mathbb{R}\}$ είναι πλήρως ορισμένο. Αλλά όταν λέμε ότι θα βρούμε το σύνολο ορισμού της συνάρτησης f εννοούμε ότι θα βάλουμε το σύνολο αυτό A υπό μορφή διαστήματος ή ενώσεων διαστημάτων του $\mathbb{R}$. Αυτό όμως σε πολλές περιπτώσεις δεν μπορεί να γίνει. Για παράδειγμα, το σ ύνολο ορισμού της συνάρτησης:

$$g(x)=\frac{x^3+5}{x^7-8x+5}$$

είναι: $B=\{x\in\mathbb{R} \mid x^7-8x+5\neq 0\}$. Το σύνολο αυτό είναι πλήρως ορισμένο, αλλά δεν μπορεί να τεθεί υπό μορφή διαστήματος ή ενώσεων διαστημάτων του $\mathbb{R}$, γιατί δε λύνεται η εξίσωση: $x^7-8x+5=0$.

ΑΣΚΗΣΗ 3 **Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης: $f(x)=x-\sqrt{x^2-4}$.**

Λύση. Το σύνολο ορισμού της συνάρτησης f, όπως βρίσκουμε εύκολα, είναι:

$$A=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty).$$

Ένας αριθμός $y\in\mathbb{R}$ ανήκει στο σύνολο τιμών $f(A)$ της f αν, και μόνο αν, η εξίσωση: $f(x)=y$ έχει μία τουλάχιστον λύση $x\in A$. Με $x\in A$, έχουμε:

$$f(x)=y \Leftrightarrow x-\sqrt{x^2-4}=y \Leftrightarrow \sqrt{x^2-4}=x-y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y\geq 0 \\ x^2-4=(x-y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y\geq 0 \\ 2xy=y^2+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq y \\ y\neq 0 \\ x=\dfrac{y^2+4}{2y} \end{cases}$$

Το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης $f:A\to\mathbb{R}$ είναι το σύνολο:
$f(A)=\{y\in\mathbb{R} \mid y$ τιμή της $f\}$.

- $f(A)=\{y\in\mathbb{R} \mid$ υπάρχει $x\in A,\ f(x)=y\}$.
- $f(A)=\{y\in\mathbb{R} \mid$ η εξίσωση $f(x)=y$ έχει μία τουλάχιστον λύση $x\in A\}$.

Επισήμανση (E_3)

Για να είναι δεκτή αυτή η τιμή του x πρέπει και αρκεί:

$$\begin{cases} y\neq 0 \\ \dfrac{y^2+4}{2y}\geq y \\ \left(\dfrac{y^2+4}{2y}\leq -2 \text{ ή } \dfrac{y^2+4}{2y}\geq 2\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\neq 0 \\ \dfrac{y^2+4}{2y}-y\geq 0 \\ \left|\dfrac{y^2+4}{2y}\right|\geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\neq 0 \\ \dfrac{y^2+4-2y^2}{2y}\geq 0 \\ |y|^2+4\geq 4|y| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y\neq 0 \\ (y^2-4)y\leq 0 \\ (|y|-2)^2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\neq 0 \\ y(y-2)(y+2)\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\leq -2 \\ \text{ή} \\ 0<y\leq 2 \end{cases}$$

Άρα, το σύνολο τιμών της f είναι:

$$f(A)=(-\infty,-2]\cup(0,2].$$

ΑΣΚΗΣΗ 4 **Να εξετάσετε αν είναι ίσες οι συναρτήσεις:**

$$\mathbf{f(x)=\left|5|x|-8x\right| \quad και \quad g(x)=8|x|-5x}.$$

Λύση. Το σύνολο ορισμού της f είναι $A=\mathbb{R}$ και της g είναι $B=\mathbb{R}$. Άρα: $A=B$.

- Έστω ότι $x\geq 0$. Τότε:
  $f(x)=|5x-8x|=|-3x|=|3x|=3x$.
  $g(x)=8x-5x=3x$.
  Άρα, τότε: $f(x)=g(x)$.
- Έστω ότι $x<0$. Τότε:
  $f(x)=|-5x-8x|=13|x|=-13x$.
  $g(x)=-8x-5x=-13x$.
  Άρα, τότε $f(x)=g(x)$.

  Συνεπώς: $f(x)=g(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα: $f=g$.

Θεωρούμε δύο συναρτήσεις:
$f:A\to\mathbb{R}$ και $g:B\to\mathbb{R}$.

Έχουμε, εξ ορισμού:

$$f=g \Leftrightarrow \begin{cases} A=B \text{ και} \\ \text{για κάθε } x\in A,\ f(x)=g(x) \end{cases}$$

- Έτσι, έχουμε: $f\neq g$, αν και μόνο αν $A\neq B$ ή $A=B$ και υπάρχει $x\in A$ με $f(x)\neq g(x)$.

Επισήμανση (E_4)

Περισσότερες Επισημάνσεις (συνολικά 15) στο 4ο τεύχος του "φ" (σελ. 249-258)