

Μια Πρόταση ΓΙΑ ΑΝΑΝΕΩΣΗ ΚΑΙ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟ ΤΩΝ ΑΝΑΛΥΤΙΚΩΝ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΙΣ ΔΥΟ ΤΕΛΕΥΤΑΙΕΣ ΤΑΞΕΙΣ ΤΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Β.Ε Βισκαδουράκης

M.ed. Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών
Πειραματικό Λύκειο Ιωνιδείου Σχολής Πειραιά
Υπεύθυνος Έκδοσης της
Περιοδικής Έκδοσης Επικοινωνίας και Διαλόγου στα Μαθηματικά «Το Φ».

Εισαγωγή

Στόχος του παρόντος σημειώματος (απόρροια εκτεταμένης ερευνητικής Διπλωματικής Εργασίας) είναι να παρουσιάσει μερικές συγκεκριμένες προτάσεις για ανανέωση και εμπλουτισμό των αναλυτικών προγραμμάτων των Μαθηματικών στις δύο τελευταίες τάξεις του λυκείου, προς την κατεύθυνση των Διακριτών Μαθηματικών.

Τα Δ.Μ. μπορούν να συνυπάρξουν με τα παραδοσιακά σχολικά μαθηματικά (την άλγεβρα, τη γεωμετρία, την τριγωνομετρία και το Λογισμό).

“Θα ήταν καλύτερα αν ο καθένας ήξερε τα πάντα. Αφού όμως αυτό δεν μπορεί να συμβεί ποτέ, θα πρέπει να διαλέξουμε τι θα διδαχθεί και μπορούμε να ισχυριστούμε ότι οι μαθηματικοί του μέλλοντος γνωρίζουν πολλή Ανάλυση”.

Η εστία της παρούσας πρότασης είναι ο εντοπισμός των μεγάλων και κεντρικών ιδεών-έννοιών που διαπερνούν και συνθέτουν το σκελετό του οικοδομήματος των Δ.Μ. και η αναζήτηση ευκαιριών για την όσο το δυνατό καλλιέργεια τους και μέσα από τα υπάρχοντα αναλυτικά προγράμματα.

Τέτοιες μεγάλες ιδέες και έννοιες είναι, *οι βασικές αρχές απαρίθμησης, η αναδρομή, η μαθηματική επαγωγή, τα γραφήματα, οι εξισώσεις διαφορών, η μελέτη αλγορίθμων.*

Παίρνοντας υπόψη τις αρχές που θεωρεί ο Καθηγητής Maurer και που οι περισσότεροι ερευνητές υιοθετούν, και με την παραδοχή ότι το διακριτό είναι αφενός πιο εύκολα διαχειρίσιμο σε σύγκριση με το συνεχές εκ μέρους των μαθητών, και αφετέρου ότι τους βοηθάει να αναπτύξουν λογικομαθηματικές ικανότητες ανώτερου επιπέδου (Van Hill) απ' ότι μέσα από τα παραδοσιακά (συνεχιστικά κυρίως) μαθηματικά, συνοπτικά η πρότασή μας είναι:

Αρχικά αναζήτηση και ανάδειξη του διακριτού και των διαδικασιών με τις οποίες συσχετίζεται, σ' όλη την έκταση των υπαρχόντων αναλυτικών προγραμμάτων του Γυμνασίου και του Λυκείου. Σε δεύτερη φάση, συμπλήρωση εμβόλιμα της διδακτέας ύλης με θέματα Διακριτών Μαθηματικών τα οποία θα αναφέρονται κυρίως στις μεγάλες και κεντρικές τους έννοιες-ιδέες (π.χ. αναδρομή).

Τέλος σε τρίτη φάση συγκρότηση ενός μαθήματος Διακριτών Μαθηματικών το οποίο θα απευθύνεται στους μαθητές της Τεχνολογικής Κατεύθυνσης Β' και Γ' τάξης, θα διδάσκεται 1 ώρα εβδομαδιαία, θα εξετάζεται από κοινού με τα Μαθηματικά Κατεύθυνσης (με αναλογία θεμάτων 3:1) και ο βαθμός σ' αυτό το μάθημα θα πολλαπλασιάζεται με συντελεστή 0,25 τόσο ο προφορικός όσο και ο γραπτός, για την εξαγωγή βαθμού στα Μαθηματικά Κατεύθυνσης. (Θα μπορούσε ενδεχομένως στη θέση των Δ.Μ. της Τεχνολογικής Κατεύθυνσης να υπάρξει αντίστοιχο μάθημα για την Θετική Κατεύθυνση με αντικείμενο π.χ. στοιχεία από Μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες και Διαφορικές Εξισώσεις).

Κατά τον **Maurer** οι διαδικασίες/αλγόριθμοι και η μελέτη αυτών των ίδιων των διαδικασιών είναι που ξεχωρίζει τα Δ.Μ. Την ίδια άποψη έχουν και οι **Grenier και Payan**, αλλά και ίσως όλοι που έχουν προσπαθήσει να δώσουν απάντηση στο τι είναι τα Δ.Μ.

Στα πλαίσια των κατευθύνσεων αυτών, αναλυτικά και για τις τάξεις Β' και Γ' Λυκείου προτείνουμε:

Για τη Β' Τάξη Λυκείου

Αρχικά στον ορισμό της ακολουθίας να δοθεί έμφαση στον αναδρομικό ορισμό και στη συνέχεια να διαπραγματευθεί η θεωρία των αναδρομικών ακολουθιών, αλλά σ' ένα επίπεδο που να είναι προσιτό

στους μαθητές, δεδομένου ότι θα διδαχθεί στην Άλγεβρα της Γενικής Παιδείας.

Η υπάρχουσα διδακτέα ύλη στην Άλγεβρα της Β΄ λυκείου παρέχει όμως και άλλες ευκαιρίες για ανάδειξη και διαπραγμάτευση βασικών εννοιών από τα Δ.Μ., όπως π.χ. η έννοια του αλγορίθμου με αφορμή τον αλγόριθμο της διαίρεσης πολυωνύμων και το σχήμα **Horner**. Στο πλαίσιο του ίδιου κεφαλαίου (“Επίλυση Εξισώσεων”) θα μπορούσε να ενταχθεί και η (αλγοριθμική) μέθοδος **Newton** για επίλυση εξισώσεων.

Όσον αφορά τώρα τα Μαθηματικά Κατεύθυνσης στη Β΄ λυκείου, ένα σημαντικό κομμάτι, ίσως η βάση των Δ.Μ.,

η Στοιχειώδης Θεωρία Αριθμών, κι αυτό αξίζει να σημειωθεί, έχει ήδη εδραιωθεί στη διδακτέα ύλη έστω και με περικοπές.

προτείνεται η διδασκαλία ολόκληρου του κεφαλαίου με τη Θεωρία Αριθμών.

Θεωρούμε πως δεν θα ήταν ουτοπία η πρόταση να προστεθεί μία διδακτική ώρα στο εβδομαδιαίο ωρολόγιο πρόγραμμα τόσο στη Β΄ όσο και στη Γ΄ λυκείου με σκοπό να διδαχθούν ενότητες από τα Δ.Μ. στις δύο αυτές τάξεις, τουλάχιστον στην Τεχνολογική Κατεύθυνση. Η ύπαρξη της κατεύθυνσης αυτής με τις τωρινές διαφοροποιήσεις στο πρόγραμμα σπουδών ίσως δεν μπορεί να δικαιολογηθεί.

η Τεχνολογική Κατεύθυνση που πραγματικά ως ιδέα και σύλληψη κατ’ αρχήν δεν ήταν άστοχη. Δεν μπορούσε όμως να δικαιολογήσει τη διαφορετικότητα της (άρα και την ύπαρξή της) με την διδασκαλία των “ποσοστών”.

Στη βάση αυτή και για την Τεχνολογική Κατεύθυνση της Β΄ Λυκείου,

προτείνεται:

(i) Διδασκαλία της Θεωρίας Πινάκων, αλλά σε καμιά περίπτωση στο πνεύμα που διδάχθηκε στα πλαίσια του συστήματος των Δεσμών. Ο πίνακας θα πρέπει να αναδειχθεί ως εξαιρετικά χρήσιμο εργαλείο και όχι ως αντικείμενο για θεωρητική επεξεργασία. Αυτό θα επιτευχθεί μέσα από τις εφαρμογές των πινάκων (π.χ. στους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς στο επίπεδο, ένα θέμα που μπορεί χωρίς πρόβλημα να διδαχθεί στη Β΄ λυκείου, έστω και αν αυτό αποσύρθηκε για

άγνωστους λόγους από την Γ' λυκείου αφού είχε διδαχθεί για μια χρονιά με επιτυχία).

(ii) Διδασκαλία Στοιχείων από τη Θεωρία Γραφημάτων. Η πρόταση αυτή μπορεί να ακούγεται υπερβολική και βαριά για το επίπεδο του λυκείου, αλλά πιστεύουμε πως είναι ρεαλιστική. Η θεωρία αυτή σ' ένα πρώτο επίπεδο, είναι προσιτή, δεν απαιτεί πολλές γνώσεις από προηγούμενα μαθηματικά, επιλύει προβλήματα δύσκολα με εξαιρετικά απλούς τρόπους και το κυριότερο, τα προβλήματα που επιλύει είναι πραγματικά, πλήρη νοήματος και έχουν έντονα προκλητικό χαρακτήρα ώστε να κερδίζουν το ενδιαφέρον και την επιμονή των μαθητών. Δικαιώνει για άλλη μια φορά επίσης την διδασκαλία της Θεωρίας Πινάκων και γενικά αποτελεί ένα παράδεισο για διαδικασίες μαθηματικής μοντελοποίησης.

Στη βάση αυτή και για την Τεχνολογική Κατεύθυνση της Β' Λυκείου,

προτείνεται:

(i) Διδασκαλία της Θεωρίας Πινάκων, αλλά σε καμιά περίπτωση στο πνεύμα που διδάχθηκε στα πλαίσια του συστήματος των Δεσμών. Ο πίνακας θα πρέπει να αναδειχθεί ως εξαιρετικά χρήσιμο εργαλείο και όχι ως αντικείμενο για θεωρητική επεξεργασία. Αυτό θα επιτευχθεί μέσα από τις εφαρμογές των πινάκων (π.χ. στους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς στο επίπεδο, ένα θέμα που μπορεί χωρίς πρόβλημα να διδαχθεί στη Β' λυκείου, έστω και αν αυτό αποσύρθηκε για άγνωστους λόγους από την Γ' λυκείου αφού είχε διδαχθεί για μια χρονιά με επιτυχία).

(ii) Διδασκαλία Στοιχείων από τη Θεωρία Γραφημάτων. Η πρόταση αυτή μπορεί να ακούγεται υπερβολική και βαριά για το επίπεδο του λυκείου, αλλά πιστεύουμε πως είναι ρεαλιστική. Η θεωρία αυτή σ' ένα πρώτο επίπεδο, είναι προσιτή, δεν απαιτεί πολλές γνώσεις από προηγούμενα μαθηματικά, επιλύει προβλήματα δύσκολα με εξαιρετικά απλούς τρόπους και το κυριότερο, τα προβλήματα που επιλύει είναι πραγματικά, πλήρη νοήματος και έχουν έντονα προκλητικό χαρακτήρα ώστε να κερδίζουν το ενδιαφέρον και την επιμονή των μαθητών. Δικαιώνει για άλλη μια φορά επίσης την

διδασκαλία της Θεωρίας Πινάκων και γενικά αποτελεί ένα παράδεισο για διαδικασίες μαθηματικής μοντελοποίησης.

Για τη Γ' Τάξη Λυκείου

Με το σκεπτικό ότι οι περισσότεροι μαθητές ίσως δεν θα συναντήσουν ποτέ μια κατάσταση στην οποία αυτοί θα πρέπει να χρησιμοποιήσουν την έννοια του ορίου ή της παραγώγου, ενώ απεναντίας συνδυασμούς και συνδυαστικές σκέψεις για λήψη αποφάσεων είναι υποχρεωμένοι να κάνουν καθημερινά, προτείνεται να απαλειφθεί το κεφάλαιο των Παραγώγων από τα Μαθηματικά Γενικής Παιδείας και οι μαθητές να διδάσκονται τα υπόλοιπα αντικείμενα που υπάρχουν στο εγχειρίδιό τους (Στατιστική, Συνδυαστική και Στοιχεία Πιθανοτήτων).

Ιδιαίτερα η Συνδυαστική θα δώσει στους μαθητές όλων των κατευθύνσεων τη δυνατότητα να εκδηλώσουν τις νοητικές τους ικανότητες σε μια ισότιμη βάση πάνω στην οποία και θα αξιολογηθούν, αίροντας έτσι την αδικία που σήμερα υφίστανται οι μαθητές της Θεωρητικής Κατεύθυνσης.

Όσον αφορά τώρα την πρόταση για το μονόωρο μάθημα των Διακριτών Μαθηματικών που έχει διατυπωθεί σε προηγούμενη παράγραφο, και για την Τεχνολογική Κατεύθυνση, αυτό προτείνεται να πραγματεύεται γενικά δύο γνωστικά αντικείμενα από τα Δ.Μ. Συγκεκριμένα,

(i) Μια εισαγωγή στη Θεωρία Αλγορίθμων, και

(ii) Τις Εξισώσεις Πεπερασμένων Διαφορών.

Οι μαθητές ασχολούνται εκτεταμένα με αλγοριθμικές διαδικασίες. Συνήθως όμως αυτές οι διαδικασίες απλώς εκτελούνται και μαθαίνονται με την εξάσκηση από τους μαθητές.

Οι ίδιοι οι Αλγόριθμοι ποτέ στο αναλυτικό πρόγραμμα δεν γίνονται αυτοί καθ' αυτοί αντικείμενο μελέτης. Αυτό ακριβώς είναι που προτείνεται εδώ. Έχοντας φτάσει στη Γ' λυκείου οι μαθητές έχουν υπόψη τους μια μεγάλη γκάμα αλγορίθμων τους οποίους θα κληθούν τώρα να “βάλουν στο μικροσκόπιο”.

Κατά τους S. Maurer και A. Ralston

“Δεν μπορείς να κάνεις ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ χωρίς Αλγορίθμους”.

Το άλλο προτεινόμενο γνωστικό αντικείμενο, οι **Εξισώσεις Πεπερασμένων Διαφορών**, αν και δεν είναι νέο στα Μαθηματικά, εντούτοις ζωνηρή αναθέρμανση του ενδιαφέροντος γύρω από το θέμα, προέκυψε κάτω από τις ανάγκες και τη βαρύτητα που έχουν αποκτήσει οι αναδρομικές διαδικασίες στα Σύγχρονα Μαθηματικά.

Κατά τον **Martin Gardner** *“ο καλύτερος τρόπος να προκαλέσεις το ενδιαφέρον ενός μαθητή είναι να του παρουσιάσεις ένα περίεργο μαθηματικό παιχνίδι, μια σπαζοκεφαλιά, ένα μαγικό τρυκ, ένα αστείο, ένα παράδοξο ή τέλος πάντων κάτι απ’ όλα εκείνα που οι πληκτικοί καθηγητές προσπαθούν να αποφύγουν, γιατί δεν τα θεωρούν σοβαρά”*.

Και μάλιστα τη στιγμή που **“οι περισσότεροι μαθηματικοί δηλώνουν ότι κάνουν μαθηματικά για τον πολύ σοβαρό λόγο ότι τους αρέσει και ότι διασκεδάζουν μ’ αυτό που κάνουν”**.

Τελειώνοντας και σε σχέση με ενδεχόμενες επιφυλάξεις απέναντι στην πρόταση μας για εισαγωγή στοιχείων από τα Διακριτά Μαθηματικά στη Μέση Εκπαίδευση, θα επικαλεστούμε τη ρήση ενός από τους σημαντικότερους φιλοσόφους του 2^{ου} αιώνα,

“Είναι σημαντικό για την γνώση ότι είναι σημαντικό για τη ζωή” **H. Putnam**